উপক্রমণিকা

মহান দেশনায়ক সুভাষচন্দ্র বসুর নামাঙ্কিত এই মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের উন্মুক্ত শিক্ষাঙ্গনে আপনাকে স্বাগত। সম্প্রতি এই প্রতিষ্ঠান দেশের সর্বপ্রথম রাজ্য সরকারি মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয় হিসেবে ন্যাক (NAAC) মূল্যায়নে 'এ'-গ্রেড প্রাপ্ত হয়েছে। বিশ্ববিদ্যালয় মঞ্জুরি কমিশন প্রকাশিত নির্দেশনামায় স্নাতক শিক্ষাক্রমকে পাঁচটি পৃথক প্রকরণে বিন্যস্ত করার কথা বলা হয়েছে। এগুলি হল — 'কোর কোর্স', 'ডিসিপ্লিন স্পেসিফিক ইলেকটিভ', 'জেনেরিক ইলেকটিভ' এবং 'স্কিল' / 'এবিলিটি এনহ্যান্সমেন্ট কোর্স'। ক্রেডিট পদ্ধতির ওপর ভিত্তি করে বিন্যস্ত এই পাঠক্রম শিক্ষার্থীর কাছে নির্বাচনাত্মক পাঠক্রমে পাঠ গ্রহণের সুবিধে এনে দেবে। এরই সঙ্গে যুক্ত হয়েছে যান্মাষিক মূল্যায়ন ব্যবস্থা এবং ক্রেডিট ট্রান্সফারের সুযোগ। শিক্ষার্থী-কেন্দ্রিক এই ব্যবস্থা মূলত গ্রেড-ভিত্তিক যা অবিচ্ছিন্ন আভ্যন্তরীণ মূল্যায়নের মধ্য দিয়ে সার্বিক মূল্যায়নের দিকে এগোবে এবং শিক্ষার্থীকে বিষয় নির্বাচনের ক্ষেত্রে যথোপযুক্ত সুবিধা দেবে। শিক্ষাক্রমের প্রসারিত পরিসরে বিবিধ বিষয় চয়নের সক্ষমতা শিক্ষার্থীকে দেশের অন্যান্য উচ্চশিক্ষা প্রতিষ্ঠানের আন্তঃব্যবস্থায় অর্জিত ক্রেডিট স্থানান্তরে সাহায্য করবে। শিক্ষার্থীর অভিযোজন ও পরিগ্রহণ ক্ষমতা অনুযায়ী পাঠক্রমের বিন্যাসই এই নতুন শিক্ষাক্রমের লক্ষ্য।

UGC (Open and Distance Learning Programmes and Online Programmes) Regulations, 2020 অনুযায়ী সকল উচ্চশিক্ষা প্রতিষ্ঠানের স্নাতক পাঠক্রমে এই সি.বি.সি.এস. পাঠক্রম পদ্ধতি কার্যকরী করা বাধ্যতামূলক— উচ্চশিক্ষার পরিসরে এই নতুন শিক্ষাক্রম এক বৈকল্পিক পরিবর্তনের সূচনা করেছে। আগামী ২০২১-২২ শিক্ষাবর্ষ থেকে স্নাতক স্তরে এই নির্বাচনভিত্তিক পাঠক্রম কার্যকরী করা হবে, এই মর্মে নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয় সিদ্ধান্ত গ্রহণ করেছে। বর্তমান পাঠক্রমগুলি উচ্চশিক্ষা ক্ষেত্রের নির্ণায়ক কৃত্যকের যথাবিহিত প্রস্তাবনা ও নির্দেশাবলী অনুসারে রচিত ও বিন্যস্ত হয়েছে। বিশেষ গুরুত্বারোপ করা হয়েছে সেইসব দিকগুলির প্রতি যা ইউ.জি.সি. কর্তৃক চিহ্নিত ও নির্দেশিত।

মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের ক্ষেত্রে স্ব-শিক্ষা পাঠ-উপকরণ শিক্ষার্থী সহায়ক পরিষেবার একটি গুরুত্বপূর্ণ অংশ। সি.বি.সি.এস. পাঠক্রমের এই পাঠ-উপকরণ মূলত বাংলা ও ইংরেজিতে লিখিত হয়েছে। শিক্ষার্থীদের সুবিধের কথা মাথায় রেখে আমরা ইংরেজি পাঠ-উপকরণের বাংলা অনুবাদের কাজেও এগিয়েছি। বিশ্ববিদ্যালয়ের আভ্যন্তরীণ শিক্ষকরাই মূলত পাঠ-উপকরণ প্রস্তুতির ক্ষেত্রে অগ্রণী ভূমিকা নিয়েছেন— যদিও পূর্বের পরম্পরা অনুযায়ী অন্যান্য বিদ্যায়তনিক উচ্চশিক্ষা প্রতিষ্ঠানে সংযুক্ত অভিজ্ঞ ও বিশেষজ্ঞ শিক্ষকদের সাহায্য আমরা অকুণ্ঠচিত্তে গ্রহণ করেছি। তাঁদের এই সাহায্য পাঠ-উপকরণের মানোন্নয়নে সহায়ক হবে বলেই আমার বিশ্বাস। এই নির্ভরযোগ্য ও মূল্যবান বিদ্যায়তনিক সাহায্যের জন্য আমি তাঁদের আন্তরিক অভিনন্দন জানাই। এই পাঠ-উপকরণ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের শিক্ষণ পদ্ধতি ও প্রকরণে নিঃসন্দেহে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা নেবে। একথা বলা বাহুল্য যে, এ বিষয়ে উন্মুক্ত শিক্ষাঙ্গনের পঠন প্রক্রিয়ায় সংযুক্ত সকল শিক্ষকের সদর্থক ও গঠনমূলক মতামত আমাদের আরও সমৃদ্ধ করবে।

মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের পাঠ-উপকরণ প্রস্তুতির এই বিদ্যায়তনিক উদ্যোগের সর্বাঙ্গীণ সাফল্য কামনা করি। মুক্তশিক্ষাক্রমে উৎকর্ষের প্রশ্নে আমরা প্রতিশ্রুতিবদ্ধ।

অধ্যাপক (ড.) শুভ শঙ্কর সরকার
উপাচার্য

Netaji Subhas Open University

Under Graduate Degree Programme
Choice Based Credit System (CBCS)
(নির্বাচন ভিত্তিক মূল্যমান ব্যবস্থা)
Subject : Honours in Commerce
Course Code : **GE-CO-21**
পাঠক্রম : **গণিত - II**
Course : Mathematics–II
(Applicable for HEC)

প্রথম মুদ্রণ : ডিসেম্বর, 2021
First Print : December, 2021

বিশ্ববিদ্যালয় মঞ্জুরি কমিশনের দূরশিক্ষা ব্যুরোর বিধি অনুযায়ী মুদ্রিত।
Printed in accordance with the regulations of the
Distance Education Bureau of the University Grants Commission.

Netaji Subhas Open University

Under Graduate Degree Programme
Choice Based Credit System (CBCS)
(নির্বাচন ভিত্তিক মূল্যমান ব্যবস্থা)
Subject : Honours in Commerce
Course Code : **GE-CO-21**
পাঠক্রম : **গণিত - II**
Course : Mathematics–II

: বিষয় সমিতি :
সদস্যবৃন্দ

অনির্বাণ ঘোষ
Director (i/c), SPS,
NSOU (Chairperson)

ধীরেন কোনার
Professor (Former) of Economics
University of Kalyani

সেবক জানা
Professor of Economics
Vidyasagar University

বিশ্বজিৎ চ্যাটার্জী
Professor of Economics,
NSOU

বিবেকানন্দ রায়চৌধুরী
Associate Professor of Economics
NSOU

সেখ সেলিম
Associate Professor of Economics
NSOU

অসীম কুমার কর্মকার
Assistant Professor of Economics
NSOU

পূর্বা রায়চৌধুরী
Associate Professor of Economics
Bhowanipore Education Society

প্রিয়ন্থী বাগচী
Assistant Professor of Economics, NSOU

: রচনা :
মহেন্দ্র রং
Associate Professor
Bangabasi Evening College

: বিন্যাস সম্পাদনা :
প্রিয়ন্থী বাগচী
Assistant Professor
of Economics, NSOU

: সম্পাদনা :
সেখ সেলিম
Associate Professor
of Economics, NSOU

প্রজ্ঞাপন

এই পাঠ-সংকলনের সমুদয় স্বত্ব নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের দ্বারা সংরক্ষিত। বিশ্ববিদ্যালয় কর্তৃপক্ষের লিখিত অনুমতি ছাড়া এর কোনো অংশের পুনর্মুদ্রণ বা কোনোভাবে উদ্ধৃতি সম্পূর্ণ নিষিদ্ধ।

কিশোর সেনগুপ্ত
নিবন্ধক

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

নির্বাচন ভিত্তিক মূল্যমান ব্যবস্থা

পাঠক্রম : **গণিত - II**
(Mathematics–II)
Course Code : **GE-CO-21**
[Applicable for HEC]

একক 1 ❑ একাধিক চলের অপেক্ষক

গঠন

1.1 উদ্দেশ্য

একটি চলরাশিযুক্ত অপেক্ষক অপেক্ষা দুই বা ততোধিক চলযুক্ত অপেক্ষক অধিকতর গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা অর্থনীতিতে এবং বিজ্ঞানের বিবিধ ক্ষেত্রে পরিলক্ষিত হয়। বস্তুত, এক চলের অপেক্ষকের মতই দুই বা ততোধিক চলযুক্ত অপেক্ষকের সীমা, সন্ততা, অবকলনের ও সমাকলনের ধারণা আরও ব্যাপকভাবে বিস্তৃত হয়। তড়িৎ বিজ্ঞান ও কারিগরি বিদ্যায় ‘একাধিক চলযুক্ত অপেক্ষকের গাণিতিক প্রয়োগ অধিক মাত্রায় ঘটে। ধরি $z = f(x, y)$ অপেক্ষকের মধ্যে দুটি স্বাধীন চল x ও y বর্তমান। x ও y -এর বিভিন্ন মানের জন্য অপেক্ষক z একটি সমতলের অঞ্চলকে প্রকাশ করে। উদাহরণস্বরূপ, ধরি $z=f\left(x,y\right)=\sqrt{9-\left(x^2+y^2\right)}$, যেখানে $x^2+y^2\leq 9$ বৃত্তের একটি অঞ্চলকেই বুঝায়। কিন্তু, যদি $z^2+x^2+y^2=9$ লিখি, তা একটি গোলকের পৃষ্ঠতলকে নির্দেশ ক’রবে। সুতরাং, দ্বিমাত্রিক জ্যামিতির আলোতে $z=f\left(x,y\right)$ সর্বদা সমতলের একটি অঞ্চল নির্দেশক অপেক্ষক হিসাবে গণ্য হয়। আমাদের আলোচনা একাধিক চলের অপেক্ষকের ক্ষেত্রে শুধুমাত্র দুটি নিরপেক্ষ স্বাধীন চলের মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকবে।

1.2 প্রস্তাবনা

ধরি x ও y চলযুক্ত অপেক্ষক $f\left(x,y\right)=z\cdot\left(x,y\right)$ যতই ঐ অঞ্চলসহ $(a,\ b)$ দিকে অগ্রসর হয় ততই $z,\ l$ (নির্দিষ্ট সংখ্যা) - এর নিকটবর্তী হয়। এমত অবস্থায়, আমরা ঘটনাটিকে প্রকাশের জন্য লিখব :

$$\underset{(x,y)\to(a,b)}{Lt} f(x,y)=l$$

বিশ্লেষণমুখী সংজ্ঞা

ধরি, l (নির্দিষ্ট সংখ্যা) এবং স্বেচ্ছাধীন ক্ষুদ্রধন সংখ্যা ε এর জন্য সেখানে উপস্থিত একটি অতিক্ষুদ্র ধনসংখ্যা δ আকারে (যা ε এর উপর নির্ভরশীল) যাতে $|\,f\,(x,\ y)-l\,|<\varepsilon$ যখন $0<|\,x-a\,|<\delta$ এবং $0<|\,y-b\,|<\delta$ হয়। তখন আমরা l কে $f\,(x,\ y)$ -এর সীমারূপে চিহ্নিত ক'রব যখন $(x,\ y)$, $(a,\ b)$ -এর খুবই নিকটবর্তী হবে।

প্রতীকে, $\underset{(x,y)\to(a,b)}{Lt} f(x,y)=l$

উদা. ধরি, অপেক্ষক (দুটি চলযুক্ত) $f\,(x,\ y)\ =\ 2x\ +\ y$ এবং ε একটি অতি ক্ষুদ্র ধন সংখ্যা।

এখন, $\left|f\left(x,y\right)-4\right|=\left|\left(2x+y\right)-4\right|=\left|2\left(x-1\right)+\left(y-2\right)\right|$

$$\leq 2\left|x-1\right|+\left|y-2\right|<2\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)+\varepsilon/2<\varepsilon$$

যখন $\left|x-1\right|<\varepsilon/4$ এবং $\left|y-2\right|<\varepsilon/2$

যদি $\delta=\varepsilon/4$ -কে গ্রহণ করা হয় যা $\left(\varepsilon/2,\varepsilon/4\right)$ -এর মধ্যে ক্ষুদ্রতর মান, তবে $\left|f\left(x,y\right)-4\right|<\varepsilon$, যখন $\left|x-1\right|<\delta$ এবং $\left|y-2\right|<\delta$

সুতরাং $\underset{(x,y)\to(1,2)}{Lt} f(x,y)=4$

1.3 দুটি চলযুক্ত অপেক্ষকের সন্ততা

ধরি, $z=f\left(x,y\right)$ (দুটি চল যুক্ত) অপেক্ষক একটি অঞ্চলে সুসংজ্ঞাত। ঐ অঞ্চলস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু $(a,\ b)$ তে ‘f’ সন্তত (continuous) হবে, যদি $\underset{(x,y)\to(a,b)}{Lt} f(x,y)=f(a,b)$ হয়।

বি.দ্র. একটি নির্দিষ্ট অঞ্চলের প্রত্যেক বিন্দুতে যদি কোনো সুসংজ্ঞাত অপেক্ষক সন্তত হয় তবে f কে ঐ অঞ্চলে সামগ্রিকভাবে সন্তত বলা হবে।

উদা. ধরি, $f(x,y)=2x+3y$ যখন $(x,y)\to(1,1)$, $f(x,y)\to 5$ সুতরাং অন্তিম পর্যায়ে, $Lt\ f(x,y)=5.\ (x,y)\to(1,1)$

কারণ, $\left|f(x,y)-5\right|=\left|2x+3y-5\right|=\left|2(x-1)+3(y-1)\right|$

$$\le 2\left|x-1\right|+3\left|y-1\right|$$

$$<2\cdot\varepsilon/4+3\cdot\varepsilon/6$$ (যেখানে $\varepsilon > 0$, ক্ষুদ্র সংখ্যা)

ধরি, $\delta=\min(\varepsilon/4,\varepsilon/6)=\varepsilon/6$ (যখন, δ হল অতি ক্ষুদ্র ধন সংখ্যা) হয় তবে

$\left|f(x,y)-5\right|<\varepsilon$, যখন $\left|x-\right|<\delta, \left|y-1\right|<\delta.$

$$\therefore \underset{(x,y)\to(1,1)}{Lt} f(x,y)=5$$

এস্থলে, $f(1,1)=2\times1+3\times1=5$

$$\therefore Lt\ f(x,y)=f(1,1)$$

এক কথায়, $f(x,y)$ অপেক্ষকটি $(1,1)$ বিন্দুতে সন্তত।

বি. দ্র. তিন বা ততোধিক চলযুক্ত অপেক্ষকের ক্ষেত্রে, উপরোক্ত ধারণাটি ‘সীমা’ ও ‘সন্ততার’ ক্ষেত্রে সমভাবে প্রযোজ্য হয়।

1.4 দুটি চলযুক্ত অবকলযোগ্য অপেক্ষকের সংজ্ঞা (আংশিক ভাবে)

ধরি, $z=f(x,y)$ (দুটি চলযুক্ত অপেক্ষক)

এখন, x সাপেক্ষে $f(x,y)$ -কে অবকলযোগ্য ঘোষণা করার সময় অবশ্যই y কে ধ্রুবক হিসাবে গ্রহণ করতে হবে। সে জন্য $f(x,y)$ -কে x সাপেক্ষে **‘আংশিক ভাবে** অবকলযোগ্য’ বলা হয় এবং ইহাকে $\frac{\partial f}{\partial x}$ বা $f_x(x,y)$ হিসাবে প্রকাশ করা হয়।

$\therefore f_x$ বা $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \underset{h \to 0}{Lt} + \dfrac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$, যদি এই সীমার অস্তিত্ব বজায় থাকে।

(এ স্থলে, $h = \Delta x$, x -এর ক্ষুদ্রতম বৃদ্ধিকে সূচিত করে)

অণুরূপে, $f(x,y)$ -কে y সাপেক্ষে (যেখানে x ধ্রুবক পদ হিসাবে গণ্য হবে) আংশিক ভাবে অবকল-যোগ্য হবে যদি

f_y বা $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \underset{k \to 0}{Lt} + \dfrac{f(x,y+k) - f(y)}{h}$ (যদি সীমা অস্তিত্বযুক্ত হয়)

(যেখানে, $k = \Delta y$, y -এর ক্ষুদ্রতম বৃদ্ধিকে সূচিত করে)

উদা. ধরি, (i) $f(x,y) = x^2y^2$ (দুটি চল x ও y -এর একটি অপেক্ষক), f_x নির্ণয় কর (1,2) বিন্দুতে।

সমাধান : $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{(1,2)} = f_x(1,2) = \underset{h \to 0}{Lt}\, f\dfrac{(1+h,2) - f(1,2)}{h}$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{(1+h)^2 \times 2^2 - 1^2 \times 2^2}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{1+2h+h^2-1}{h} = 4 \underset{h \to 0}{Lt} \frac{h(h+2)}{h}$$

$$= 4 \underset{h \to 0}{Lt} (h+2) = 4 \times 2 = 8$$

(ii) ধরি, $f(x,y) = x^2y^2, f_y$ নির্ণয় কর (1,2) বিন্দুতে।

এস্থলে, f_y বা $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_{(1,2)} = \underset{k \to 0}{Lt} \dfrac{f(1,2+k) - f(1,2)}{k}$

$$= \underset{k \to 0}{Lt} \frac{1^2(2+k)^2 - 1^2 \times 2^2}{k}$$

$$= \underset{k\to 0}{Lt}\left\{\frac{\left(4+4k+k^2\right)-4}{k}\right\} = \underset{k\to 0}{Lt}\left(\frac{4+4k+k^2-4}{k}\right)$$

$$= \underset{k\to 0}{Lt}\frac{k(4+k)}{k} = \underset{k\to 0}{Lt}(4+k) = 4$$

☐ Homogeneous function (সমমাত্রিক অপেক্ষক)

ধরি, $f(x,y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + ... + a_{n-1}xy^{n-1} + y^n$

এক্ষেত্রে লক্ষণীয় যে x ও y -এর সূচকের যোগফল সর্বদা n। সুতরাং অপেক্ষকটিকে একটি সমমাত্রিক অপেক্ষক (homogeneous function) হিসাবে গণ্য করা হয় যার মাত্রা (degree) হ'ল n.

$f(x,y)$ (সমমাত্রিক অপেক্ষক) -কে নিম্নোক্তভাবেও লেখা যায়।

$$f(x,y) = x^n\left[a_0 + a_1\left(\frac{y}{x}\right) + a_2\left(\frac{y}{x}\right)^2 + ... + \left(\frac{y}{x}\right)^n\right]$$

$$= x^n\phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

উদা. $f(x,y) = \frac{xy}{x^3+y^3}$ একটি সমমাত্রিক অপেক্ষক যার মাত্রা হল (–1).

[কারণ, $f(x,y) = \frac{xy}{x^3\left(1+(y/x)^3\right)} = \frac{1}{x}(y/x)/1+(y/x)^3 = x^{-1}\psi(y/x)$]

1.5 অয়লার উপপাদ্য

দুটি চলের ক্ষেত্রে, সমমাত্রিক অপেক্ষকের জন্য

যদি f বা $f(x,y) = x^n\phi\left(\frac{y}{x}\right), n$ মাত্রার একটি সমসত্ব অপেক্ষক হয় তবে অয়লার উপপাদ্যানুসারে

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf$$

প্রমাণ : এস্থলে, $f(x,y)=x^n\phi\left(\frac{y}{x}\right)$

$\therefore \frac{\partial f}{\partial x}=nx^{n-1}\phi\left(\frac{y}{x}\right)+x^n\phi'\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)$ (x সাপেক্ষে আংশিক অবকলের ক্ষেত্রে)

$$=nx^{n-1}\cdot\phi\left(\frac{y}{x}\right)-yx^{n-2}\phi'\left(\frac{y}{x}\right)$$

অনুরূপে, $\frac{\partial f}{\partial y}=x^n\cdot\phi'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}$ (y সাপেক্ষে আংশিক অবকলের জন্য)

$$=x^{n-1}\phi'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\therefore x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$=nx^n\phi\left(\frac{y}{x}\right)-x^{n-1}y\,\phi'\left(\frac{y}{x}\right)+x^{n-1}y\,\phi'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$=nx^n\phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

$=nf(x,y)=nf$ (প্রমাণিত)

বি. দ্র. (i) যদি, $f(x,y,z)$ একটি সমমাত্রিক অপেক্ষক হয় এবং যার মাত্রা ‘n’ তবে **অয়লার উপপাদ্যানুসারে,** $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=nf(x,y,z)$ (প্রথম ক্রমের জন্য)

(ii) যদি $f(x,y)$ একটি সমমাত্রিক অপেক্ষক হয় এবং যার মাত্রা n, তবে অয়লার উপপাদ্যানুসারে,

$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f=n(n-1)f(x,y)$ (দ্বিতীয় ক্রমের জন্য)

(iii) যদি $f(x,y,z)$ একটি সমমাত্রিক অপেক্ষক হয় এবং যার মাত্রা n, তবে অয়লার উপপাদ্যানুসারে,

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f(x,y,z)=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f=n(n-1)f(x,y,z)$$

[দ্বিতীয় ক্রমের জন্য]

উচ্চতর ক্রমের আংশিকভাবে অবকলযোগ্য অপেক্ষকের ক্ষেত্রে (Higher order partial derivatives of a function)

ধরি, $f(x,y)$ দুটি চলযুক্ত একটি অপেক্ষক।

আমরা, প্রথম ক্রমের (first order) আংশিক ভাবে অবকলযোগ্য অপেক্ষকের ক্ষেত্রে, $\frac{\partial f}{\partial x}$ বা f_x এবং $\frac{\partial f}{\partial y}$ বা f_y -কে পূর্বেই সংজ্ঞায়িত করেছি। যদি পূর্বের ধারণাকে আরও উচ্চতর ক্রমের ক্ষেত্রে বিস্তারিত করা যায় তবে মূলত দ্বিতীয় ক্রমের জন্য,

(i) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (x সাপেক্ষে) (দ্বিতীয় ক্রমের ক্ষেত্রে) $= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ বা f_{xx}

(ii) $= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (y সাপেক্ষে) (দ্বিতীয় ক্রমের জন্য) $= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ বা f_{yy}

(iii) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{xy}$

(iv) $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{yx}$ পাওয়া যায়।

এইভাবে, ক্রমশ তৃতীয় ক্রম, চতুর্থ ক্রম, (আরও উচ্চতর ক্রমের জন্য) আংশিকভাবে অবকলযোগ্য অপেক্ষককে পাওয়া যাবে।

সাধারণ ভাবে, উল্লেখযোগ্য যে $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (যখন, f_x , f_y, f_{xy}, f_{yx} অস্তিত্ব যুক্ত এবং f_{xy} এবং f_{yx} উভয়েই সন্তত)

যদি f_x , f_y, f_{xy}, f_{yx} অস্তিত্বযুক্ত কিন্তু f_{xy} এবং f_{yx} উভয়ে সন্তত নয় তখন $f_{xy} \neq f_{yx}$

অয়লার উপপাদ্যের প্রয়োগ (Application of Euler's theorem)

উদা. 1 যদি $u = \tan^{-1}\left(\frac{x^3 + y^3}{x - y}\right)$ হয় তবে প্রমাণ করুন যে $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$

সমাধান : শর্তানুসারে,

$$u = \tan^{-1}\left(\frac{x^3 + y^3}{x - y}\right)$$

বা, $\tan u = \dfrac{x^3 + y^3}{x - y} = \dfrac{x^3\left(1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^3\right)}{x(1 - y/x)} = \dfrac{x^2\left(1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^3\right)}{(1 - y/x)} = x^2\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$

সুতরাং tan u একটি সমমাত্রিক (homogeneous) অপেক্ষক যার মাত্রা (degree) হ'ল 2.

ধরি, $v = \tan u$

$\therefore x\dfrac{\partial v}{\partial x} + y\dfrac{\partial v}{\partial y} = 2v$ **(অয়লার উপপাদ্য অনুসারে**

বা, $x\sec^2 u\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\sec^2 u\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2\tan u$

বা, $\left(x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\sec^2 u = 2\tan u$

বা, $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2\left(\dfrac{\sin u}{\cos u}\right)\cdot\cos^2 u$

বা, $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2\sin u\cos u$

বা, $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$ **(প্রমাণিত)**

উদা. 2 যদি $u = \sin^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right) + \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ হয় তবে দেখান যে $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

সমাধান : এ স্থলে, $u = \sin^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right) + \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (প্রদত্ত)

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{y^2 - x^2}}\left(\frac{1}{y}\right) + \frac{x^2}{x^2 + y^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}-\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\therefore x\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{y^2-x^2}}-\frac{xy}{x^2+y^2}.....(\text{i})$$

পুনরায়, $$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{y^2-x^2}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)+\frac{x^2}{x^2+y^2}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}+\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\therefore y\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{\sqrt{y^2-x^2}}+\frac{xy}{x^2+y^2}.....(\text{ii})$$

(i) + (ii) করে পাই

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{y^2-x^2}}-\frac{xy}{x^2+y^2}-\frac{x}{\sqrt{y^2-x^2}}+\frac{xy}{x^2+y^2}$$

বা, $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial x}=0,$ (এটাই নির্ণেয় ফল)

বি.দ্র. (সমস্যাটিকে, **অয়লার উপপাদ্য অনুযায়ী সমাধান করা যায়।**)

উদা. 3 যদি $u=\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ $(x,y)\neq(0,0)$ হয় তবে k এর মান কত হলে $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial y}{\partial y}=ku$ হবে?

সমাধান ঃ এখানে,

u অর্থাৎ $u(x,y)=\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

$$=\frac{x^2\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)}$$

$$= x^{2-\frac{1}{2}} \frac{\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^{1/2}} = x^{\frac{3}{2}} \frac{\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)}{\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^{1/2}\right)}$$

স্পষ্টতই $u(x, y)$ একটি সমমাত্রিক অপেক্ষক, যার মাত্রা হ'ল 3/2.

$\therefore$ অয়লার উপপাদ্য অনুসারে, আমরা পাই,

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3}{2}u.....(\text{i})$$

প্রশ্নমতে, $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial y}{\partial y} = ku.....(\text{ii})$

সুতরাং, k -এর মান = 3/2 [(i) ও (ii) কে তুলনা করে]

উত্তর : $k = 3/2$

উদা. 4 যদি $u = \frac{x^2y^2}{x+y}$ হয় তবে অয়লার উপপাদ্য প্রয়োগে $\left(x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ কে নির্ণয় ক'রে দেখান যে $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6u.$

সমাধান : এক্ষেত্রে,

$$u(x, y) = \frac{x^2y^2}{(x+y)}$$

$$= \frac{x^4\left(y^2/x^2\right)}{x(1+y/x)} = x^3\psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

$\therefore$ u (x, y) একটি সমমাত্রিক অপেক্ষক, যার মাত্রা হ'ল 3.

সুতরাং অয়লার উপপাদ্য অনুসারে,

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 3u.....(1)$$

(1) নং কে x সাপেক্ষে অবকল করে পাই

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+1\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=3\frac{\partial u}{\partial x}.....(2)$$

এবার (1) নং কে y সাপেক্ষে অবকল করে পাই,

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+1\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=3\frac{\partial u}{\partial y}.....(3)$$

[(2) × x + (3) × y] করে পাই

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y\frac{\partial u}{\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=3\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\left(\because\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right)$$

বা, $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$$=2\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

= $2\cdot 3u$ ((1) নং সম্পর্ক থেকে)

= $6u$,

এটাই নির্ণেয় ফল।

উদা. 5 যদি $f(x,y)=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$ হয় তবে অয়লার উপপাদ্য প্রয়োগে $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}$ -এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : এক্ষেত্রে, $f(x,y)=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$, অপেক্ষকটি সমমাত্রিক কিনা পরীক্ষা করা সর্বাগ্রে প্রয়োজন।

$$\therefore f(tx,ty)=\tan^{-1}\left(\frac{ty}{tx}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{tx}{ty}\right)$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)=t^0 f(x,y)$$

সূত্র (1) : $f(x, y)$ অপেক্ষক সমমাত্রিক হবে যদি $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$ যেখানে n অপেক্ষকের মাত্রা এবং t (চল), x ও y উপর নির্ভরশীল হবে না।

সুতরাং $f(x,y)$ অপেক্ষকটি সমমাত্রিক যার মাত্রা (degree) হ'ল 0.

$\therefore$ অয়লার উপপাদ্য অনুসারে,

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \times f(x,y)$$

$$= 0$$

$\therefore$ নির্ণেয় $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ **(উত্তর)**

উদা. 6 যদি $u(x,y) = xf\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = xf\left(\frac{y}{x}\right)$ এবং $x^2 u_{xx} + 2xy + u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$

সমাধান : ধরি, $v(x,y) = xf\left(\frac{y}{x}\right) = x^1 f\left(\frac{y}{x}\right)$

এবং $w(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right) = x^0 g\left(\frac{y}{x}\right)$ $\left(\because x^0 = 1, x \neq 0\right)$

স্পষ্টত, v একটি সমমাত্রিক অপেক্ষক (মাত্রা = 1)

এবং w একটি সমমাত্রিক অপেক্ষক (মাত্রা = 0)।

$\therefore$ অয়লার উপপাদ্য অনুসারে,

$$x\frac{\partial v}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial y} = 1 \times v = v \quad ......(1)$$

এবং $x \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \times w = 0 \quad ....(2)$

{(1) + (2)} -এর মাধ্যমে পাই,

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=v \quad (\because u=v+w)$$

$$=xf\left(\frac{y}{x}\right) \quad \left(\because v=xf\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$ **(প্রমাণিত)**

যেহেতু v এবং w উভয়েই সমমাত্রিক, মাত্রা যথাক্রমে 1 এবং 0, সুতরাং অয়লার উপপাদ্য (দ্বিতীয় ক্রম) অনুসারে,

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 v=1\times(1-1)\times v=0 \;....(3)$$

[$u(x,y)$ সমমাত্রিক অপেক্ষক (মাত্রা = n) -এর ক্ষেত্রে দ্বিতীয় ক্রম অয়লার উপপাদ্য হ'ল $\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u=n(n-1)u$]

এবং $\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 w=0\times(0-1)w \;=\; 0.....(4)$

{(3) + (4)} -এর সাহায্যে,

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 (v+w)=0+0$$

বা, $\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u=0 \quad (\because u=v+w)$

বা, $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ (যেখানে $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$)

বা, $x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}=0$ **(প্রমাণিত)**

উদা. 7 যদি $f(x,y)=\frac{\left(x^2+y^2\right)^n}{2n(2n-1)}+x\phi\left(\frac{y}{x}\right)+\psi\left(\frac{x}{y}\right)$ হয় তবে অয়লার উপপাদ্য প্রয়োগে প্রমাণ করুন যে $x^2f_{xx}+2xyf_{xy}+y^2f_{yy}=\left(x^2+y^2\right)^n$

সমাধান ঃ ধরি, $\mathrm{P}(x,y)=\dfrac{\left(x^2+y^2\right)^n}{2n(2n-1)}=\dfrac{x^{2n}\left\{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2\right\}^n}{2n(2n-1)}$

$$\mathrm{Q}(x,y)=x\phi\left(\frac{y}{x}\right)=x^1\phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

এবং $\mathrm{R}(x,y)=\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)=x^0\psi\left(\dfrac{y}{x}\right),\ \left(\because x^0=1,\ x\neq 0\right)$

স্বাভাবিকভাবে, P, Q এবং R প্রত্যেকেই সমমাত্রিক অপেক্ষক, মাত্রাগুলি যথাক্রমে $2n$, 1 এবং 0.

$\therefore$ অয়লার উপপাদ্য প্রয়োগে পাই,

(দ্বিতীয় ক্রমের)

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\mathrm{P}=2n(2n-1)\mathrm{P}.....(1)$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\mathrm{Q}=1(1-1)\mathrm{Q}=0.....(2)$$

এবং $\left(x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2\mathrm{R}=0(0-1)\mathrm{R}=0.....(3)$

{(1) + (2) + (3)} ক'রে পাই

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2(\mathrm{P}+\mathrm{Q}+\mathrm{R})=2n(2n-1)\mathrm{P}+0+0$$

বা, $\left(x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 f=2n(2n-1)\mathrm{P}\quad\left(\because f=\mathrm{P}+\mathrm{Q}+\mathrm{R}\right)$

বা, $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2n(2n-1)\dfrac{\left(x^2+y^2\right)^n}{2n(2n-1)}$

বা, $x^2 f_{xx}+2xy\,f_{xy}+y^2 f_{yy}=\left(x^2+y^2\right)^n$ **(প্রমাণিত)**

উদা. 8 যদি $u(x,y)=x^3+y^3+3x^2y+3xy^2$ হয় তবে f সমমাত্রিক কিনা পরীক্ষা করুন এবং সমমাত্রিক হলে অয়লার উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই করুন।

সমাধান : এ স্থলে,

$$u(x,y)=x^3+y^3+3x^2y+3xy^2$$

$$=(x+y)^3$$

$$=\left\{x\left(1+\frac{y}{x}\right)^3\right\}=x^3\left\{1+\left(\frac{y}{x}\right)\right\}^3$$

$$=x^3\psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

$\therefore$ u $(x,$ $y)$ একটি সমমাত্রিক অপেক্ষক যার মাত্রা হ'ল 3.

সুতরাং, u $(x,$ $y)$ সমমাত্রিক অপেক্ষক (মাত্রা 3) হওয়ায় অয়লার উপপাদ্য অনুযায়ী আমরা পাই

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=3u....(1)$$

এখন (1) নং সম্পর্কের সত্যতা যাচাই করতে হবে।

স্পষ্টতই, $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3+y^3+3x^2y+3xy^2\right)$

$$=3x^2+0+6xy+3y^2$$

$$=3x^2+6xy+3y^2.....(2)$$

এবং $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^3+y^3+3x^2y+3xy^2\right)$

$$=0+3y^2+3x^2+6xy$$

$$=3y^2+3x^2+6xy.....(3)$$

$$\therefore\ x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=x\left(3x^2+6xy+3y^2\right)+y\left(3y^2+3x^2+6xy\right)$$

[(2) ও (3) নং এর সাহায্যে]

$$=3x^3+6x^2y+3xy^2+3y^3+3xy^2+6xy^2$$

$$=3x^3+3y^3+9x^2y+9xy^2$$

$$=3\left(x^3+y^3+3x^2y+3xy^2\right)=3u$$

$\therefore$ (1) নং সম্পর্কটি যথার্থ অর্থাৎ প্রদত্ত সমমাত্রিক অপেক্ষকের ক্ষেত্রে অয়লার উপপাদ্যটি সত্য।

উদা. 9 যদি $u=\sin^{-1}\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)$ হয় তবে প্রমাণ করুন যে $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\tan(u)$

সমাধান ঃ এক্ষেত্রে, $u=\sin^{-1}\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)$ (প্রদত্ত)

বা, $\sin u=\frac{x^2+y^2}{x+y}$

$$=\frac{x^2\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)}{x\left(1+(y/x)\right)}$$

$$=x^1\psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

ধরি, $v = \sin u$ (একটি সমমাত্রিক অপেক্ষক, মাত্রা = 1)

$\therefore$ অয়লার উপপাদ্য-অনুসারে,

$$x\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial y}=1\times v$$

$$= v.....(1)$$

এখন, $\frac{\partial v}{\partial x} = \cos u \frac{\partial u}{\partial x}$

এবং $\frac{\partial v}{\partial y} = \cos u \frac{\partial u}{\partial y}$

$\therefore$ (1) নং থেকে $\left(x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} \right)\cos u = \sin u$

বা, $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \tan(u)$ **(প্রমাণিত)**

উদা. 10 যদি $v = \log_e \left(\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right)$ হয়, তবে দেখান যে $x\frac{\partial v}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial y} = 1$

সমাধান ঃ এ স্থলে,

$$v = \log_e \left(\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right) \text{ (প্রদত্ত)}$$

বা, $e^v = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

$$= \frac{x^3 \left(1 + \left(\frac{y}{x} \right)^3 \right)}{x^2 \left(1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2 \right)}$$

$$= x^1 \cdot \psi \left(\frac{y}{x} \right)$$

সুতরাং, e^v একটি সমমাত্রিক অপেক্ষক যার মাত্রা হ’ল 1.

$\therefore$ অয়লার উপপাদ্য প্রয়োগে পাই,

$$x\frac{\partial\left(e^{v}\right)}{\partial x}+y\frac{\partial\left(e^{v}\right)}{\partial y}=1\times e^{v}$$

বা, $x\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{v}\right)+y\frac{\partial}{\partial v}\left(e^{v}\right)=e^{v}$

বা, $xe^{v}\frac{\partial v}{\partial x}+ye^{v}\frac{\partial v}{\partial y}=e^{v}$

বা, $e^{v}\left(x\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial y}\right)=e^{v}$

বা, $x\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial y}=1,$ এটাই নির্ণেয় ফল।

1.6 বিজড়িত বা অন্তর্নিহিত অপেক্ষকের বৈশিষ্ট্য

ধরি, $f\left(x,y\right)=0,$ দুটি চলরাশি x ও y -এর অপেক্ষক। এক্ষেত্রে y -কে সরাসরি x -এর মাধ্যমে প্রকাশ করাটা কষ্টসাধ্য হয় কারণ x ও y চল দুটির সমন্বয়ে f অপেক্ষকটি গঠিত বলে। তবু বিশেষ কৌশলে, x ও y -এর মধ্যে উপস্থিত এই সম্পর্ককে এমনভাবে কাজে লাগাতে হয় যাতে $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},....$ ইত্যাদি নির্ণয় কালে আমরা ধরে নেব y যেন x এর অপেক্ষক এবং সাহায্য নেব আংশিক অবকলের অর্থাৎ f_x, f_y এর।

Implict function theorem : (বিজড়িত বা অন্তর্নিহিত অপেক্ষকের উপপাদ্য)

ধরি, $f\left(x,y\right)=0$ .... (1)

y কে x সাপেক্ষে অবকলযোগ্য ধরে নিয়ে আমরা f_x ও f_y নির্ণয় ক'রব (যেখানে f_x, f_y উভয়েই সন্তত) আমরা (1) নং কে অবকলযোগ্য করার সময় f এর বৃদ্ধিকে x এর বৃদ্ধি ও অনুরূপে y এর বৃদ্ধি বর্তমান ভাবব কারণ $f\ (x,\ y)$, চল x ও y -এর জড়িত অপেক্ষক।

ফলে অবকল নিয়মে, $\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$

বা, $\frac{\partial y}{\partial x}=-\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}\right)=-\frac{f_x}{f_y}....(2)$ (যখন, $f_y \neq 0$)

বি. দ্র. (2) নং -কে পুনরায় অবকলন করে (x সাপেক্ষে) পাই,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{f_y\left(f_{xx}-\left(f_{yx}\frac{dy}{dx}\right)\right)-f_x\left(f_{xy}+f_{yy}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)}{\left(f_y\right)^2}$$

$\frac{dy}{dx}$ -এর মান প্রতিস্থাপন করে পাই,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\left(\frac{f_{xx}f_y^2-2f_{yx}f_xf_y+f_{yy}f_x^2}{f_y^2}\right).....(3)$$

অপেক্ষকের মধ্যে দুটি অপেক্ষক বর্তমান (Functions of two functions) ঃ

ধরি, $u=f(x,y)$ যেখানে $x=\phi(\xi,\eta)$ এবং $y=\psi(\xi,\eta)$ [ξ,η পরস্পর স্বাধীন চলক]

এখন, $\frac{\partial u}{\partial \xi}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \xi}$

এবং $\frac{\partial u}{\partial \eta}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \eta}$

(c) সামগ্রিক ভাবে প্রকাশিত অবকল-গুণাংক (Total differential co-efficient) ঃ

ধরি, $u=f(x,y)$ যেখানে $x=\phi(t)$ এবং $y=\psi(t)$

$\therefore \frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$

এস্থলে, $\frac{du}{dt}$ কে t -এর সাপেক্ষে u এর 'total differential co-efficient' বা মোট অবকল গুণাংক' বলা হয়।

(d) Exact differential (যথাযথ অবকল)

$u = f(x, y)dx + \phi(x, y)dy$ কে 'যথাযথ অবকল' বা 'exact differential' বলা হবে যদি

du বা $d(u(x, y)) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$ আকারে প্রকাশিত হয়।

অর্থাৎ যদি $u(x, y)$ এমন একটি অপেক্ষক আমরা খুঁজে পাই, যার জন্য

$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, y)$ এবং $\frac{\partial u}{\partial y} = \phi(x, y)$ এমনভাবে বর্তমান, যাতে

$\frac{\partial}{\partial y}f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\phi(x, y)$ সত্য।

বি.দ্র : 'যথাযথ অবকলের' জন্য এটি একটি প্রয়োজনীয় শর্ত (necessary condition)।

1.7 বিজড়িত অপেক্ষকের কতকগুলি গুরুত্বপূর্ণ প্রয়োগ

উদা. 1 যদি $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ হয় তবে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরি, $f(x, y) = x^{2/3} + y^{2/3} - a^{2/3}$

$$\therefore f_x \text{ বা } \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{3}x^{2/3-1} + 0 - 0$$

$$= \frac{2}{3}x^{-1/3}$$

অনুরূপে, f_y বা $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3}y^{-1/3}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{f_x}{f_y}\right) = -\frac{(2/3)x^{-1/3}}{\left(\frac{2}{3}\right)y^{-1/3}} = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$$

সুতরাং, নির্ণেয় $\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}$ **(উত্তর)**

উদা. 2 যদি $x^y + y^x = a^b$ হয় তবে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরি, $f(x, y) = x^y + y^x - a^b$

$\therefore f_x$ বা, $\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1} + y^x \log_e y$

অনুরূপে, f_y বা, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \log_e x + xy^{x-1}$

ধরি, $p = x^y \quad \therefore \log_e p = y \log_e x \quad \therefore \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial x} = y/x$

$$\therefore \frac{\partial p}{\partial x} = x^y \cdot \frac{y}{x} = yx^{y-1}$$

ধরি, $q = y^x$

$\log_e q = x \log_e y$

$$\therefore \frac{1}{q} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} = 1 \cdot \log_e y$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = q \cdot \log_e y = y^x \log_e y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{f_x}{f_y}\right)$$

$$= -\left(\frac{yx^{y-1} + y^x \log_e y}{x^y \log_e x + xy^{x-1}}\right)$$

$\therefore$ নির্ণেয় $\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{yx^{y-1} + y^x \log_e y}{xy^{x-1} + x^y \log_e x}\right)$ **(উত্তর)**

উদা. 3 যদি $(\cos x)^y = (\sin x)^x$ হয় তবে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান : ধরি, $f(x,y)=(\cos x)^y-(\sin y)^x$

সুতরাং, $\frac{\partial f}{\partial x}$ বা $f_x=-y\sin x(\cos x)^{y-1}-(\sin y)^x\log_e(\sin y)$

এবং $\frac{\partial f}{\partial y}$ বা $f_y=(\cos x)^y\log_e(\cos x)-x\cos y(\sin y)^{x-1}$

$\therefore f_x=-(\cos x)^y\{y\tan x+\log_e(\sin y)\}$

অনুরূপে, $f_y=(\cos x)^y\{\log_e(\cos x)-x\cot y\}\left[\therefore(\sin y)^x=(\cos x)^y\right]$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x}{f_y}=-\left\{\frac{-(\cos x)^y\left(y\tan x+\log_e(\sin y)\right)}{(\cos x)^y\left(\log_e(\cos x)-x\cot y\right)}\right\}$$

$$=\frac{y\tan x+\log_e(\sin y)}{\log_e(\cos x)-x\cot y}$$

$\therefore$ নির্ণেয় $\frac{dy}{dx}=\frac{y\tan x+\log_e(\sin y)}{\log_e(\cos x)-x\cot y}$ **(উত্তর)**

উদা. 4 যদি $e^x+e^y=2xy$ হয় তবে $\frac{dy}{dx}=$ কত?

সমাধান : ধরি, $f(x,y)=e^x+e^y-2xy$

$\therefore\frac{\partial f}{\partial x}$ বা $f_x=e^x+0-2y\cdot 1=e^x-2y,$ এবং $\frac{\partial f}{\partial y}$ বা $f_y=0+e^y-2x\cdot 1=e^y-2x.$

সুতরাং, $\frac{dy}{dx}=-\left(\frac{f_x}{f_y}\right)$

$$=-\left(\frac{e^x-2y}{e^y-2x}\right)$$

$\therefore$ নির্ণেয় $\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{e^x - 2y}{e^y - 2x}\right)$ **(উত্তর)**

1.8 বিবিধ উদাহরণমালা

উদা. 1 প্রমাণ করুন যে $\underset{(x,y)\to(0,0)}{\text{Lt}} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ -এর কোনো অস্তিত্ব নেই।

সমাধান : ধরি, $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ এবং $y = mx$ যেখানে m একটি প্রচল (parameter)

সুতরাং $\underset{(x,y)\to(0,0)}{\text{Lt}} f(x,y)$

$$= \underset{(x,y)\to(0,0)}{\text{Lt}} \left\{\frac{2xy}{x^2 + y^2}\right\}$$

$$= \underset{(x,y)\to(0,0)}{\text{Lt}} \left\{\frac{2x(mx)}{x^2 + (mx)^2}\right\}$$

$$= \underset{(x,y)\to(0,0)}{\text{Lt}} \left\{\frac{2x^2m}{x^2 + \left(1 + m^2\right)}\right\}$$

$$= \underset{(x,y)\to(0,0)}{\text{Lt}} \left\{\frac{2m}{2 + m^2}\right\}$$

$\therefore = \underset{(x,y)\to(0,0)}{\text{Lt}} f(x,y)$ এর মান সুনির্দিষ্ট হবে না কারণ প্রচল (m) -এর বিভিন্ন মানের জন্য সীমার মান বিভিন্ন হবে।

সুতরাং $\underset{(x,y)\to(0,0)}{\text{Lt}} f(x,y)$ -এর অস্তিত্ব নেই। **(প্রমাণিত)**

উদা. 2 যদি $u(x,y) = x^3 + x^2y^2 + y^3$ হয় তবে প্রমাণ করুন যে $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$

সমাধান : এক্ষেত্রে, $u(x,y) = x^3 + x^2y^2 + y^3$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 2xy^2 + 0 = 3x^2 + 2xy^2$$

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 + 2xy^2\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy^2\right) = 0 + 4xy = 4xy$$

এখন, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3 + x^2y^2 + y^3\right)$

$$= 0 + 2x^2y + 3y^2 = 2x^2y + 3y^2$$

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2y + 3y^2\right)$$

$$= 4xy + 0 = 4xy$$

সুতরাং, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ (প্রমাণিত)

উদা. 3 যদি $f(x,y) = xy\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right), (x,y) \neq (0,0)$

$$= 0, \quad (x,y) = (0,0)$$

প্রমাণ করুন যে $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$

সমাধান : এক্ষেত্রে [আংশিক অবকলের সংজ্ঞা অবলম্বনে]

$$f_{xy}(0,0) = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(f_y\right)\right]_{(0,0)} = \underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{f_y(0+h,0) - f_y(0,0)}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{f_y(0+h,0) - f_y(0,0)}{h} ......(1)$$

প্রথমত, $f_y(h,0) = \underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{f(h,0+k) - f(h,0)}{k} = \underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{f(h,k) - f(h,0)}{k}$

$$= \underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{hk\left(\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}\right) - 0}{k} = \underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} \left\{h\left(\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}\right)\right\} = h\left(\frac{h^2-0}{h^2+0}\right) = h$$

$$\therefore f_y(h,0) = h$$

সুতরাং, $f_y(0,0) = 0.$

এখন, (1) নং থেকে, $f_{xy}(0,0) = \underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{h-0}{h} = \underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{h}{h} = 1$

পুনরায়, $f_{yx}(0,0) = \left[\frac{\partial}{\partial y}(f_x)\right]_{(0,0)}$

$$= \underset{k \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{f_x(0,0+k) - f_x(0,0)}{k}$$

$$= \underset{k \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k} .....(2)$$

এখন, $f_x(0,k) = \underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{f(0+h,k) - f(0,k)}{h} = \underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{f(h,k) - f(0,k)}{h}$

$$= \underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{hk\left(\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}\right) - 0}{h} = \underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} \left(k\left(\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}\right)\right)$$

$$= k\left(\frac{0-k^2}{0+k^2}\right) = k(-1) = -k$$

$\therefore f_x(0,0)=0.$

$\therefore$ (2) নং থেকে,

$$f_{yx}(0,0)=\underset{k\to 0}{\mathrm{Lt}}\left(\frac{-k-0}{k}\right)=-1$$

সুতরাং, $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$ **(প্রমাণিত)**

বি.দ্র. উপরের উদাহরণটিতে f_{xy} এবং f_{yx} সন্ততা বজায় রাখতে পারেনি। ফলে, (0,0) বিন্দুতে $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

উদা. 4 যদি $\mathrm{A}=\pi h^2\frac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$ হয় তবে $d\mathrm{A}$ = কত? (যেখানে h এবং α উভয়েই স্বাধীন চল)

সমাধান : আমরা জানি যে $d\mathrm{A}=\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial\alpha}d\alpha+\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial h}dh$

$$=\left\{\frac{\pi h^2\cos\alpha(1-\sin\alpha)+\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{(1-\sin\alpha)^2}\right\}d\alpha$$

$$+2\pi h\left(\frac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\right)dh$$

$$=\pi h^2\left\{\frac{\cos\alpha-\cos\alpha\sin\alpha+\cos\alpha\sin\alpha}{(1-\sin\alpha)^2}\right\}d\alpha$$

$$+2\pi h\left(\frac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\right)dh$$

$$=\left\{\frac{\pi h^2\cos\alpha}{(1-\sin\alpha)^2}\right\}d\alpha+2\pi h\left(\frac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\right)dh$$

$$=\frac{\pi h}{1-\sin\alpha}\left(\frac{h\cos\alpha}{1-\sin\alpha}d\alpha+2\sin\alpha\ dh\right)$$ **(উত্তর)**

উদা. 5 যদি $z = f(x, y)$ হয় যেখানে $x = e^u + e^{-v}$ এবং $y = e^{-u} - e^v$, তবে প্রমাণ করুন যে $\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}$

সমাধান : এস্থলে, $z = f(x, y)$, যেখানে $x = e^u + e^{-v}$ এবং $y = e^{-u} - e^v$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$= e^u\frac{\partial z}{\partial x} - e^{-u}\frac{\partial z}{\partial y} \ldots .(1)$$

পুনরায়, $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$

$$= -e^{-v}\frac{\partial z}{\partial x} - e^v\frac{\partial z}{\partial y} \ldots ..(2)$$

(1) – (2) থেকে পাই

$$\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = \left(e^u + e^{-v}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + \left(e^v - e^{-u}\right)\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$= \left(e^u + e^{-v}\right)\frac{\partial z}{\partial x} - \left(e^{-v} - e^v\right)\frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}$$ **(প্রমাণিত)**

উদা. 6 যদি $u = f(x, y)$, যেখানে $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ তবে দেখান যে $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$

সমাধান : এক্ষেত্রে,

$u = f(x, y)$, যেখানে $x = r\cos\theta$ এবং $y = r\sin\theta$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}(\cos\theta)+\frac{\partial u}{\partial y}(\sin\theta).....(1)$$

এবং $\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial u}{\partial y}(r\cos\theta)$$

$$\therefore \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}=-\frac{\partial u}{\partial x}(\sin\theta)+\frac{\partial u}{\partial y}(\cos\theta).....(2)$$

এখন, $\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}(\cos\theta)+\frac{\partial u}{\partial y}(\sin\theta)\right)^2$

$+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(\cos\theta)-\frac{\partial u}{\partial x}(\sin\theta))^2$ [(1) নং ও (2) নং সম্পর্ক থেকে]

বা, $\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2=\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)$

$$=\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)\cdot 1$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

সুতরাং, $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$ (প্রমাণিত)

1.9 সংক্ষিপ্তসার

এই একক পড়লে আমরা জানতে পারি—

- একটি চলরাশিযুক্ত অপেক্ষক অপেক্ষা দুই বা ততোধিক চলযুক্ত অপেক্ষকের অধিক এর গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা অর্থনীতিতে-বিজ্ঞানের বিবিধ ক্ষেত্রে এবং প্রযুক্তিতে পরিলক্ষিত হয়।

1.10 অনুশীলনী

1. সমাধান করুন : যদি $f(x,y)=\log_e\left(x^2y+xy^2\right)$ হয় তবে f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} এবং f_{yy} নির্ণয় করুন।

2. সমাধান করুন : যদি $u(x,y)=\dfrac{x+y}{1-xy}$ হয় তবে $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ হয় কিনা পরীক্ষা করুন।

3. সমাধান করুন : যদি $u=f(x+\alpha y)+g(x-\alpha y)$ হয় (যেখানে α একটি ধ্রুবক), প্রমাণ করুন : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\alpha^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ।

4. সমাধান করুন : যদি $u(x,y)=\cos^{-1}\left\{\dfrac{(x+y)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right\}$ হয় তবে দেখান যে

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{2}\cot u=0$$

5. সমাধান করুন : যদি $x^3-3ax^2+y^3=0$ হয় তবে প্রমাণ করুন যে $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{2a^2x^2}{y^3}=0.$

6. $\Delta=\dfrac{1}{2}ab\sin c$ (প্রদত্ত), সম্পর্কটিকে ব্যবহার করে দেখান যে $\dfrac{d\Delta}{\Delta}=\dfrac{da}{a}+\dfrac{db}{b}+\cot c dc$

7. সমাধান করুন : যদি $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=a$ (ধ্রুবক) হয় তবে প্রমাণ করুন যে,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{a}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}$$

8. সমাধান করুন : যদি $u=\dfrac{x}{a}+f(ay-bx)$ [a, b ধ্রুবক],

দেখান যে $a\dfrac{\partial u}{\partial x}+b\dfrac{\partial u}{\partial x}=1$

9. যদি $u(x,y)=x^2\tan^{-1}\dfrac{y}{x}-y^2\tan^{-1}\dfrac{x}{y}$ তবে প্রমাণ করুন যে $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

10. যদি $H=f(y-z,z-x,x-y)$ হয় তবে দেখান যে $\dfrac{\partial H}{\partial x}+\dfrac{\partial H}{\partial y}+\dfrac{\partial H}{\partial z}=0.$

1.11 গ্রন্থপঞ্জি

- Ranajit Dhar, 2011, Advanced Business Mathematics, Dishari Prakashani
- Mehta and Madnani, 2012, Mathematics for Economists, Sultan Chand and Sons
- Sarkhel and Bhukta, 2010, An Introduction to Mathematical Techniques for Economic Analysis, Book Syndicate Private Limited
- Agarwal, 2000, Quantitative Methods, Vrinda Publications Pvt Ltd

একক 2 ❑ একাধিক চলের অপেক্ষকের ক্ষেত্রে অবম/চরম অথবা চরম/অবম মান প্রাপ্তি

গঠন

2.1 উদ্দেশ্য

দ্বিঘাত কার্যক্রম সমস্যা (Quadratic programming problem, সংক্ষেপে Q.P.P) মূলত অরৈখিক কার্যক্রম সমস্যার (non-linear programming problem) একটি সুসংগঠিত প্রতিরূপ। চরম/অবম মানের জন্য এই প্রক্রিয়াকে সুসম্পন্ন করতে দ্বিঘাত অভিপ্রেত অপেক্ষকের চরম/অবম মান নির্ণেয়র ক্ষেত্রে আমাদের এক সেট অসমতা চিহ্নবিশিষ্ট বাধাযুক্ত চলক-এর অধীনে কাজ ক'রতে হয়। এক্ষেত্রে সমস্যা বহুল কর্মসূচির থেকে প্রাপ্ত সমাধানগুলি সর্বদা Kuhn-Tucker (কুন-টাকার) শর্তের মাধ্যমে পাওয়া যায়। দ্বিঘাত বস্তুনিষ্ঠ অপেক্ষকের আকাঙ্খাজনিত ফল কঠোরভাবে উত্তল (convex) হয় অবম মানের জন্য এবং কঠোরভাবে অবতল হয় চরম মানের জন্য। যেহেতু—সমাধান ক্ষেত্র (Solution Space) সর্বদা উত্তল হলে, কাম্য ফলের চরিত্রটি সার্বিক (global) গুণসম্পন্ন হয়।

সংজ্ঞা : ধরি, x^{T} এবং $c \in R^n$ এবং $(\mathrm{Q})_{n \times n}$ প্রতিসম ম্যাট্রিক্স (symmetric matrix) তবে দ্বিঘাত কার্যক্রমের সমস্যাটি হয় নিম্নরূপ :

চরম/অবম মানের জন্য,

$$f(x) = cx + \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\mathrm{Q}x$$

চলের বস্তুনিষ্ঠ শর্ত : $\mathrm{A}x \leq b,\ x \geq 0$

যখন

$$x = [x_1, x_2, ..., x_n]^{\mathrm{T}},$$

$$c = [c_1, c_2, ..., c_n],$$

$$b = [b_1, b_2, ..., b_n],$$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11}, a_{12} ..... a_{1n} \\ a_{21}, a_{22} .... a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}, a_{m2} .... a_{mn} \end{bmatrix}$$

এবং $\mathrm{Q} = \begin{bmatrix} c_{11}, c_{12} ..... c_{1n} \\ c_{21}, c_{22} .... c_{2n} \\ .... \\ c_{n1}, c_{n2} .... c_{nn} \end{bmatrix}$,

এক্ষেত্রে x^{T} Q x অপেক্ষকটি দ্বিঘাত আকারে সংজ্ঞায়িত হয় যখন Q একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হিসাবে আত্মপ্রকাশ করে।

2.2 প্রস্তাবনা

আজকাল শিল্প, বাণিজ্য ছাড়াও সমাজের বিভিন্ন কার্যধারায় একটি রীতির/বা নীতির প্রায়োগিক দিকটা সহজেই আমরা অনুভব ক'রছি। তত্ত্বগত দিক ছাড়া প্রায়োগিক দিক কে চিন্তা করা যায় না। আমরা সকলেই বর্তমানে বিবিধ কার্যক্ষেত্রে স্বল্প সময়ে বেশি কাজ করার বা অর্থ উপার্জন করার তাগিদকে গুরুত্ব দিচ্ছি। প্রয়োজনের সাথে সাথে বিভিন্ন আংশিক পদ্ধতির উদ্ভাবন হয়েছে। রৈখিক (linear) বা অরৈখিক (non-linear), সমতা বা অসমতা রক্ষা করে কীভাবে এই সব সমস্যাকে সমাধান করা যায় তার বিচার ও

বিশ্লেষণ নিয়ে অবিরত গবেষণাও চলছে। আংশিক অগ্রগতির সাথে বিজ্ঞানের বিভিন্ন ক্ষেত্রে একটি চল (variable) বা একাধিক চল (multi-variable) নিয়ে সন্তত (বা অসন্তত) অপেক্ষকের চরম (বা অবম) মান নির্ধারণের পদ্ধতি আবিষ্কৃত হয়েছে এবং হচ্ছে। L.P.P (linear programming problem) অর্থাৎ রৈখিক রীতিকে বা পদ্ধতিকে অবলম্বন করে সমস্যা সমাধানের প্রয়াস শুরু হয় সর্বপ্রথম। পরে দ্বিতীয় বিশ্বযুদ্ধের সময় ইংল্যান্ডে সামরিক বিভাগ থেকে রসদের পরিমাণ কমায় কী পদ্ধতি অনুসরণ করে আরও বেশি দিন দেশের সুরক্ষায় যুদ্ধ বজায় রাখা যায় তার পদ্ধতি বিজ্ঞানী ও গণিত বিশারদের নিকট জানার আবেদন আসে। শুরু হয় পদ্ধতিগত বিশ্লেষণ বা গবেষণা। জন্ম দিল 'OR' (Operational research) কে। ক্রীড়া তত্ত্ব (game theory), Decision theory (সিদ্ধান্ত গ্রহণ তত্ত্ব), Queueing theory (অপেক্ষা তত্ত্ব) তে ব্যবহৃত হতে লাগল 'OR' তত্ত্ব যার মূলে নিহিত রয়েছে max-min (চরম-অবম) বা minmax (অবম-চরম) অবস্থাকে সামলানোর প্রচেষ্টা। তাই আজ কৃষিতে, শিল্পে, বাণিজ্যে, বাজার তৈরিতে, 'Optimization' তত্ত্বের বহুল প্রয়োগ লক্ষ করা যাচ্ছে। বর্তমানে এই এককে আমরা সংক্ষেপে কলন বিদ্যার প্রাথমিক ধারণাকে আশ্রয় করে পরবর্তী স্তরে বাধাযুক্ত বা বাধাবিহীন (constrained/or non a constrained) সমতা বজায়কারী এবং অসমতা ধারণকারী সমীকরণগুলির সহজলভ্য সমাধান পদ্ধতি আংশিক নিয়মের অধীনে আলোচনা ক'রব।

সনাতনী (classical) তত্ত্বানুসারে চরম ও অবম মান নির্ধারণের জন্য (বাধাযুক্ত ও বাধামুক্ত উভয়ক্ষেত্রেই) পদ্ধতি বর্তমান। প্রধানত: অবকলনের সাহায্যেই সমস্যাগুলি সমাধান করার চেষ্টা করা হয়। এস্থলে বাধাযুক্ত (contrained) সমস্যাকে সমাধানের নিমিত্ত এবং চরম/অবম মান প্রাপ্তির জন্য প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট, শর্তের সন্ধানে (অসমতা চিহ্নযুক্ত সমস্যাগুলি) 'Kuhn-Tucker' -এর আলোচনা পদ্ধতি খুবই সমৃদ্ধ। আমারা এখন এই এককে আলোচ্য বিষয় হিসাবে 'Kuhn–Tucker' শর্তাবলিকেই নির্বাচন ক'রব।

(A) সাধারণভাবে, বহুচলের অবম মান প্রাপ্তির আকাঙ্খা অসমতা চিহ্নযুক্ত বাধাযুক্ত সমস্যার ক্ষেত্রটি নিম্নরূপ :

ধরি, অপেক্ষক f এর অবম মান $= f(x)$

শর্ত সাপেক্ষে $g_j(x) \le b_j,\ j = 1, 2, ..., m$

যখন $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^{\mathrm{T}}$.

Kuhn-Tucker -এর প্রয়োজনীয় শর্তাবলি :

প্রদত্ত সমস্যায় অপেক্ষকটির অবম মান প্রাপ্তির জন্য যে শর্তের অধীনে অগ্রসর হতে হবে তা হ'ল

$$f \equiv f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

যখন $g_j(x) = g_j(x, x_2, ..., x_n) \le b_j,\ j = 1, 2, ..., m.$

স্থানীয়ভাবে x_0 -তে অবম মান প্রাপ্তির জন্য নিম্নোক্ত শর্তসমূহ খুবই প্রয়োজনীয় :

(i) $\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}=0,\ i=1,2,....,n$

(ii) $\lambda_j\left[g_j(x)-b_j\right]=0,\ j=1,2,....,m$

(iii) $g_j(x)\leq b_j,\ j=1,2,...,m$

(iv) $\lambda_j \geq 0,\ j=1,2,....,m$

x_0 বিন্দুতে এগুলি প্রযোজ্য।

(B) অপর পক্ষে,

যদি অপেক্ষক f -এর চরম মানের জন্য ধরি,

$f \equiv f(x)=f\left(x_{1,}x_2,\cdots,x_n\right)$

অধীনস্থ শর্ত হ'ল : $g_j\left(x_1,x_2,.....,x_n\right)\geq b_j,\ j=1,2,....,m.$

স্থানীয় ভাবে, $\left(x_1^*,x_2^*,.....,x_n^*\right)$ -তে চরম মান প্রাপ্তির জন্য 'Kuhn-Tucker' -এর প্রয়োজনীয় শর্তগুলি হ'ল নিম্নরূপ :

(i) $\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}=0,\ i=1,2,....,n$

(ii) $\lambda_j\left(g_j-b_j\right)=0,\ j=1,2,...,m$

(iii) $g_j \leq b_j,\ j=1,2,....,m$

(iv) $\lambda_j \geq 0,\ j=1,2,....,m$

$\left(x_1^*,x_2^*,.....,x_n^*\right)$ -তে সর্বদা সিদ্ধ হয়।

'Kuhn–Tucker' -এর প্রয়োজনীয় শর্তের মতই যথেষ্ট শর্তও বর্তমান যদি চল (অভিপ্রেত) অপেক্ষক এবং সমাধান ক্ষেত্র নির্দিষ্ট শর্তের সাপেক্ষে উত্তল ও অবতল ধর্মকে আশ্রয় করে। চরম মান প্রাপ্তির জন্য চল (অভিপ্রেত) অপেক্ষকটি অবতল গুণসম্পন্ন হলে সমাধান ক্ষেত্রটি হবে উত্তলগুণের অধিকারী। কিন্তু, অবম মানের ক্ষেত্রে চল/অভিপ্রেত) অপেক্ষকও সমাধান ক্ষেত্রের মধ্যে উত্তল গুণের প্রভাব লক্ষ করা যায়।

বোঝার সুবিধার্থে নীচে আমরা একটি উদাহরণ লক্ষ ক'রব।

প্রশ্ন : 'Kuhn-Tucker' শর্তের অধীনে সমাধান করুন :

z-এর চরম মান প্রাপ্তির জন্য ধরি,

$$z = 8x_1 + 12x_2 - 4x_1^2 - 4x_2^2 - 4x_3^2,$$

অধীনস্থ শর্ত হল : $x_1 + x_2 \le 1$

$$2x_1 + 3x_2 \le 6$$

সমাধান : এক্ষেত্রে বিধিনিষেধ অনুসারে,

$$g_1 = x_1 + x_2 \le 1$$

এবং $g_2 = 2x_1 + 3x_2 \le 6$

চরম মানের জন্য 'Kuhn-Tucker' এর প্রয়োজনীয় শর্তাবলি হ'ল :

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_i} 0, \; i = 1, 2, 3$$

$$\lambda_j \left(g_j - b_j \right) \le 0, \; j = 1, 2$$

$$\lambda_j \le 0, \; j = 1, 2$$

অর্থাৎ $8 - 8x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 ......(1)$

$$12 - 8x_2 + \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 ......(2)$$

$$-8x_3 = 0 ......(3)$$

$$\lambda_1 \left(x_1 + x_2 - 1 \right) = 0 .....(4)$$

$\lambda_2(2x_1+3x_2-6)=0.....(5)$

$x_1+x_2-1\le 0.....(6)$

$2x_1+3x_2-6\le 0......(7)$

$\lambda_1\le 0......(8)$

$\lambda_2\le 0......(9)$

উপরিক্ত আলোচনা থেকে 4 টি ক্ষেত্র লক্ষ করা যায় :

প্রথম ক্ষেত্র : $\lambda_1=0, \lambda_2=0$

দ্বিতীয় ক্ষেত্র : $\lambda_1=0, \lambda_2\ne 0$

তৃতীয় ক্ষেত্র : $\lambda_1\ne 0, \lambda_2=0$

চতুর্থ ক্ষেত্র : $\lambda_1\ne 0, \lambda_2\ne 0$

প্রথম ক্ষেত্র : যখন $\lambda_1=0, \lambda_2=0,$

(1) নং থেকে পাই, $x_1=1$

(2) নং থেকে পাই, $x_2=3/2$

এস্থলে, সমাধানযোগ্য মানগুলি (6)-নং কে সিদ্ধ করে না।
সুতরাং এটা বাতিল বলে গণ্য হবে।

দ্বিতীয় ক্ষেত্র : এক্ষেত্রে $\lambda_1=0, \lambda_2\ne 0$

(5) নং থেকে পাই, $2x_1+3x_2-6=0.....(10)$

(1) নং থেকে পাই, $8-8x_1+2\lambda_2=0$

$$\Rightarrow x_1=\frac{\lambda_2+4}{4}......(11)$$

(2) নং থেকে পাই, $12-8\lambda_2+3\lambda_2=0$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{3\lambda_2 + 12}{8} \ldots .(12)$$

(11) ও (12) -এর সাহায্য নিয়ে (10) নং থেকে পাই,

$$\frac{\lambda_2 + 4}{2} + \frac{g\lambda_2 + 36}{8} - 6 = 0$$

$$\Rightarrow 4\lambda_2 + 16 + g\lambda_2 + 36 - 48 = 0$$

$$\Rightarrow 13\lambda_2 = -4$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = -\frac{4}{13} < 0$$

(11) নং থেকে পাই, $x_1 = -\frac{1}{13} + 1 = \frac{12}{13}\left(\because \lambda_2 = -\frac{4}{13}\right)$

(12) নং থেকে পাই, $x_2 = \dfrac{3\times\left(-\frac{4}{13}\right)+12}{8}\ \left(\because \lambda_2 = -\frac{4}{13}\right)$

$$= \frac{-\frac{12}{13}+12}{8} = \frac{156-12}{13\times 8}$$

$$= \frac{\cancel{144}^{18}}{13\times\cancel{8}} = \frac{18}{13}$$

এই ক্ষেত্রে সমাধানযোগ্য মান দুটি (6)-নং কে সিদ্ধ করে না বলে এদের বাতিল করা হ'ল।

তৃতীয় ক্ষেত্র : এস্থলে $\lambda_1 \neq 0$ এবং $\lambda_2 = 0.$

(4) নং থেকে পাই, $x_1 + x_2 - 1 = 0 \ldots ..(13)$

(1) নং থেকে পাই, $8 - 8x_1 + \lambda_1 = 0,\ x_1 = \frac{\lambda_1 + 8}{8} \ldots .(14)$

(2) নং থেকে পাই, $12 - 8x_2 + \lambda_1 = 0,$ বা, $x_2 = \frac{\lambda_1 + 12}{8} \ldots ..(15)$

(13) নং থেকে (14) নং ও (15) নং সম্পর্ক দুটির সাহায্য নিয়ে পাই,

$\lambda_1 = -6.$

(14) নং থেকে পাই, $x_1 = \frac{-6+8}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \ (\because \lambda_1 = -6)$

(15) নং থেকে পাই, $x_2 = \frac{-6+12}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \ (\because \lambda_1 = -6)$

(3) নং থেকে পাই, $x_3 = 0$

সুতরাং, $x_1 = 1/4, x_2 = \frac{3}{4}$ নং $x_3 = 0.$

এই সমাধানযোগ্য মানগুলি (6) নং ও (7) নং সম্পর্ক দুটিকে সিদ্ধ করে।

$\therefore$ নির্ণেয় চরম আকাঙ্খিত মান হিসাবে $(x_1, x_2, x_3$ সমাধানযোগ্য মানগুলি গ্রহণ করে) পাই, চরম $(z) = \frac{17}{2}$ বা 8·5.

[বি. দ্র. এক্ষেত্রে চতুর্থ ক্ষেত্রটি নিষ্প্রয়োজন হয়ে গেছে কারণ তৃতীয় ক্ষেত্র থেকেই নির্ণেয় চরম মান নির্ণয় করা সম্ভব হয়েছে।]

2.3 ল্যাগ্রাঞ্জের গুণক পদ্ধতি

বহুচলকের ক্ষেত্রে সাধারণত: সমতা চিহ্ন সমন্বিত বিধিনিষেধের আওতায় চরম/অবম মান প্রাপ্তির জন্য আকাঙ্খিত সমস্যাগুলিকে দুটি পদ্ধতিতে সমাধান করা হয়। যথা

(1) বিধি নিষেধের আওতায় ভেদ (Variation) পদ্ধতি

(2) ল্যাগ্রাঞ্জের গুণক পদ্ধতি

আমরা এখন দ্বিতীয় পদ্ধতিটি নিয়ে আলোচনা ক'রব। ল্যাগ্রাঞ্জের গুণক পদ্ধতিতে মূল সমস্যা সমাধানের জন্য প্রদত্ত আরোপিত শর্তের সঙ্গে অতিরিক্ত চলক (additional variable) -এর সংযোজন প্রয়োজন হয়। যদি মূল সমস্যায় n সংখ্যক চলক (বা চলরাশি) বর্তমান থাকে এবং 'সমতা বিধির' সাপেক্ষে n সংখ্যক অতিরিক্ত চলের প্রয়োজন হয় তবে অন্তিম পর্যায়ে (final stage) অজানা চলের সংখ্যা দাঁড়ায় $(m + n)$.

এখন ল্যাগ্রাঞ্জের মূল উপপাদ্যগুলিকে আমরা বিবৃত ক'রব যাতে প্রদত্ত সমস্যার সমাধানে প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্তগুলি সহজেই তুলে ধরা যায়।

উপপাদ্য (i) [প্রয়োজনীয় শর্তের জন্য] :

অপেক্ষক $f\left(x_1, x_2, \ldots . x_n\right)$ যখন $g_j\left(x_1, x_2, \ldots \ldots, x_n\right)=0,\left(j=1,2, \ldots \ldots, m\right)$ শর্তের অধীনে চালিত হয়ে আপেক্ষিকভাবে $\left(x_1^*, x_2^*, x_n^*\right)$ বিন্দুতে অবম (চরম) মান গ্রহণ করবে তখন প্রয়োজনীয় শর্ত হিসাবে ল্যাগরাঞ্জীয় অপেক্ষক, $\left(\in x_1, x_2, \ldots \ldots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \ldots, \lambda_n\right)=f+\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j$, প্রত্যেক প্রচল $\left(\lambda_j\right)$ -এর সাপেক্ষে প্রথম ক্রমের আংশিক অবকল-গুণাংকের প্রাপ্ত ফলকে শূন্যের সাথে সমান ক'রবে।

উপপাদ্য (ii) (যথেষ্ট শর্তের জন্য) :

অপেক্ষক $f\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right)$ যখন $g_j\left(x_1, x_2, \ldots ., x_m\right)=0\left(j=1,2, \ldots . m\right)$ শর্তের অধীনে চালিত হয়ে আপেক্ষিকভাবে $\left(x_1^*, x_2^*, \ldots \ldots, x_n^*\right)$ বিন্দুতে অবম (চরম) মান গ্রহণ ক'রবে তখন যথেষ্ট শর্ত হিসাবে দ্বিঘাত অপেক্ষক Q যা নিম্নোক্তভাবে সংজ্ঞায়িত:

$\mathrm{Q}=\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 \mathrm{L}}{\partial x_i \partial x_j} d x_i d x_j$, $\left(x_1^*, x_2^*, \ldots \ldots, x_n^*\right)$ বিন্দুতে নির্ণীত (evaluation) হয়ে অবশ্যই ধনাত্মক (ঋণাত্মক) নির্দিষ্ট (definite) গুণযুক্ত হবে যখন সকল $d x_i$ পছন্দমত সম্ভাব্য ভেদমান নিয়ে চলবে।

উদাহরণ : ল্যাগ্রাঞ্জীয় (Lagrangian) গুণক পদ্ধতি অবলম্বনে, অবম $f\left(x_1, x_2, x_3\right)=9-8 x_1$ $6 x_2-4 x_3+2 x_1^2+2 x_2^2+x_3^2+2 x_1 x_2+2 x_1 x_3$ নির্ণয় করুন যখন অধীনস্থ নিষেধ শর্তের প্রেক্ষিতটি হ'ল,

$x_1-x_2+2 x_3=3.$

সমাধান : ধরি, $f=9-8 x_1-6 x_2-4 x_3+2 x_1^2+2 x_2^2+x_3^2+2 x_1 x_2+2 x_1 x_3$

এবং $g_1 \equiv x_1-x_2+2 x_3-3=0$

$\therefore$ প্রদত্ত ল্যাগ্রাঞ্জীয় অপেক্ষক

$$\mathrm{L}\left(x_1, x_2, x_3, \lambda\right)=f+\lambda g_1=\left(9-8 x_1-6 x_2-4 x_3+2 x_1^2+2 x_2^2+x_3^2+2 x_1 x_2+2 x_1 x_3\right)$$
$$+\lambda\left(x_1-x_2+2 x_3-3\right)$$

L-এর অবম মানের জন্য প্রয়োজনীয় শর্তাবলি হ'ল :

$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$ বা, $-8 + 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \lambda = 0$

$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$ বা, $-6 + 4x_2 + 2x_1 - \lambda = 0$

$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 0$ বা, $-4 + 2x_3 + 2x_1 + 2\lambda = 0$

$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ বা, $x_1 - x_2 + 2x_3 - 3 = 0$

উপরোক্ত চারটি সমীকরণ সমাধান করে পাই

$x_1^* = 4/5$, $x_2^* = 1$, $x_3^* = 8/5$ এবং $\lambda^* = 2/5$

আমরা এখন যথেষ্ট শর্ত প্রয়োগে অবম মান খুঁজব।

এখন (4/5, 1, 8/5) = x^* বিন্দুতে L_{ij} এবং g_{ij} নির্ণয় ক'রব।

$$L_{11} = \left[\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}\right] = 4$$

$$L_{12} = \left[\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}\right]_{x^*} = 2$$

$$L_{13} = L_{31} = \left[\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3}\right]_{x^*} = 2$$

$$L_{22} = \left[\frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}\right]_{x^*} = 4$$

$$L_{23} = L_{32} = \left[\frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3}\right]_{x^*} = 0$$

$$L_{33} = \left[\frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2}\right]_{x^*} = 2$$

$$g_{11} = \left[\frac{\partial g}{\partial x_1}\right]_{x^*} = 1$$

$$g_{12} = \left[\frac{\partial g}{\partial x_2}\right]_{x^*} = -1$$

$$g_{13} = \left[\frac{\partial g}{\partial x_3}\right]_{x^*} = 2$$

এখন আমরা নিম্নলিখিত নির্ণায়ক-সম্বলিত সমীকরণটিকে যথার্থভাবে প্রকাশ ক'রে পাই

$$\begin{vmatrix} (L_{11}-z) & L_{12} & L_{13} & g_{11} \\ L_{21} & (L_{22}-z) & L_{23} & g_{12} \\ L_{31} & L_{32} & (L_{33}-z) & g_{13} \\ g_{11} & g_{12} & g_{13} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

বা, $\begin{vmatrix} 4-z & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4-z & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2-z & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

বা, $(-1)\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4-z & 0 & -1 \\ 0 & 2-z & 2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 4-z & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2-z & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4-z & 2 & 1 \\ 2 & 4-z & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$

বা, $(-1)\{2(2-z)-2(8-2z)+1(4-z)(2-z)\}-1\{(4-z)(2-z)-2(6)$

$+1(4-2z)\}-4\{4-z\}(4-z)-2(3)+1(z-4)\} = 0$

বা, $(-1)\left(z^2-4z-4\right)-1\left(z^2-8z\right)-4\left(z^2-7z+6\right)=0$

বা, $-z^2+4z+4-z^2+8z-4z^2+28z-24=0$

বা, $-6z^2+40z-20=0$

বা, $3z^2-20z+10=0$

$$\therefore z = \frac{20 \pm \sqrt{400-120}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{70}}{3} = \frac{10 \pm 8{\cdot}36}{3}$$

$= 6{\cdot}12, 0{\cdot}54$ ($\sqrt{70}$ -এর দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত মান নিয়ে)

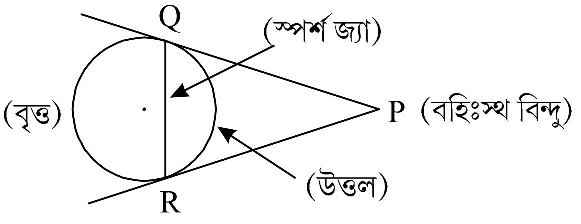
যেহেতু বীজ দুটি ধনাত্মক, সুতরাং $\left(\frac{4}{5}, 1, \frac{8}{5}\right)$ বিন্দুটি একটি আপেক্ষিক অবম মান দেবে প্রদত্ত অপেক্ষকের ক্ষেত্রে।

$\therefore$ নির্ণেয় $f_{\min}$ (অবম f) $= \frac{1}{5}$ **(উত্তর)**

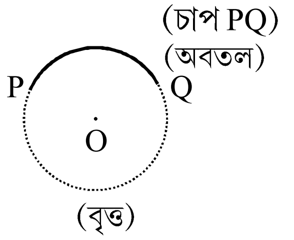
2.4 উত্তল অপেক্ষক এবং অবতল অপেক্ষক

সাধারণ সংজ্ঞা থেকে বলা যায় যে, একটি বৃত্তের যে কোন চাপ (arc), বৃত্তের মধ্যে অবস্থিত সকল বিন্দুর প্রেক্ষিতে অবতল (Concave) এবং বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু সাপেক্ষে বৃত্তের যে অংশ ঐ বিন্দু এবং ঐ বিন্দু থেকে অঙ্কিত (বৃত্তের উপর) স্পর্শক দুটির অর্ন্তগত জ্যা (অর্থাৎ স্পর্শ জ্যার) -এর মধ্যে অবস্থিত তাকে 'উত্তল' (Convex) হিসাবে অভিহিত করা হয়। অবশিষ্ট বৃত্তের অংশ অবশ্যই অবতল রূপে গণ্য হয়।

চিত্রানুসারে, (i)



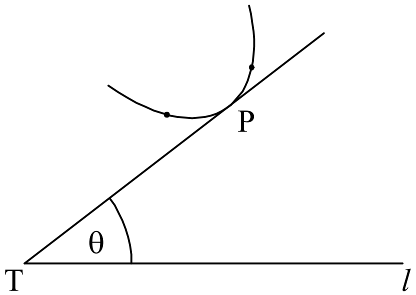
(ii)



ধরি, সমতলস্থ বক্রের উপর অবস্থিত P একটি বিন্দু। P বিন্দু দিয়া অতিক্রম করে না এমন একটি সরলরেখাংশ হ'ল l

P বিন্দুতে অবস্থিত বক্রটি "উত্তল" হবে যদি P বিন্দুকে ঘিরে ঐ বক্রের একটি ক্ষুদ্র অংশ, P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক এবং একটি সরলরেখাংশ 'l' -এর তৈরি সূক্ষ্মকোণ (θ) -কে পরিহার করে থাকে।

(iii) চিত্রানুসারে ঃ

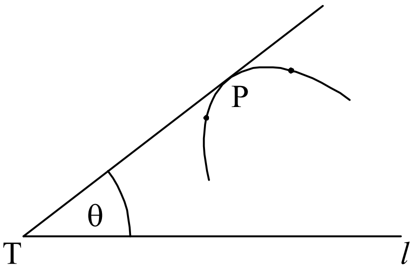


[বক্ররেখা P বিন্দুতে *l* রেখাংশ
সাপেক্ষে 'উত্তল' (Convex)]

অনুরূপে,

বক্ররেখা, P বিন্দুতে 'অবতল' (Concave) হবে যদি বক্রের উপরিস্থিত P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক এবং '*l*' রেখাংশের মধ্যে উৎপন্ন কোণ (θ), P কে ঘিরে বক্ররেখার অতি ক্ষুদ্র অংশের অন্তর্গত হয়।

(iv) নং চিত্রানুসারে ঃ

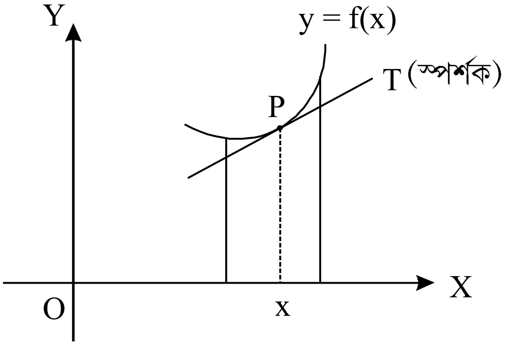


[বক্ররেখা *l* রেখাংশ
সাপেক্ষে P বিন্দুতে অবতল (Concave)]

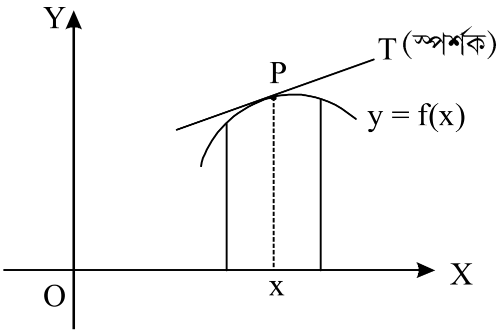
স্বাভাবিক ধারণা অনুসারে, বক্রের উত্তলাকার অংশ অনেকটা পেয়ালার (Cup) মতো এবং বক্ররে অবতলাকার অংশ টুপির (Cap) মতো।

উপরিউক্ত আলোচনা থেকে এটা স্পষ্ট হলো যে একটি আয়তাকার তন্ত্রে যদি বক্রের সমীকরণ $y = f(x)$ হয় এবং বক্রের উপরিস্থিত P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক PT হয় (যা y-অক্ষের সমান্তরাল নয়) তবে P বিন্দুকে ঘিরে বক্রের একটি ক্ষুদ্রাঞ্চল PT স্পর্শকের উপরিভাগে অথবা নিম্নদেশে অবস্থান করে তখন (i) বক্রটিকে P বিন্দুতে 'উর্দ্ধমুখী অবতল' (Concave upwards), **অথবা,** P বিন্দুতে নিম্নমুখী উত্তল (Convex downwards) হিসাবে চিহ্নিত করা হয়।

(v) নং চিত্রানুসারে, P বিন্দুতে 'উর্দ্ধমুখী উত্তল (Convex upwards) হিসাবে পরিগণিত হয়।



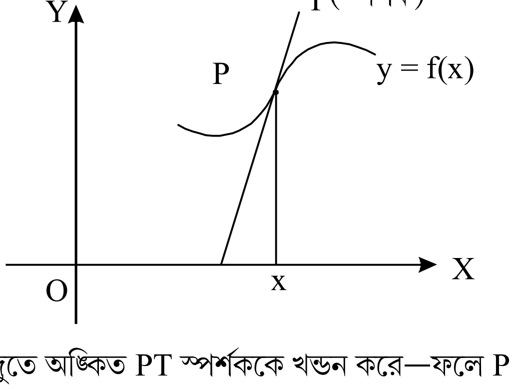
(vi) নং চিত্রানুসারে,



অনুরূপে,

$y = f(x)$ বক্ররেখা P বিন্দুতে নিম্নমুখী অবতল (Concave downwards)

(vii) নং চিত্রানুসারে,



$y = f(x)$ বক্ররেখা P বিন্দুতে অঙ্কিত PT স্পর্শককে খন্ডন করে—ফলে P বিন্দুর প্রেক্ষিতে বাম দিকে

অংশটি উত্তলাকার এবং দক্ষিণ দিকের অংশটি অবতলাকার হয় তখন বক্রের উপরে অবস্থিত P বিন্দুকে 'বাঁক বদলের বিন্দু' (Point of inflexion) রূপে উল্লেখ করা হয়।

ধরি, $y = f(x)$, বক্ররেখার উপরিস্থিত P বিন্দুতে, ইহার অবতল উর্দ্ধমুখী বা নিম্নমুখী হওয়ার শর্ত যদি $f'(x)$ এবং $f''(x)$ উভয়েই বর্তমান থাকে এবং সন্তত হয় (P (x, y) বিন্দুটিকে ঘিরে বক্ররেখার ক্ষুদ্রাংশে) এবং $f''(x) \neq 0$ হয়, তবে $y = f(x)$ বক্রের অবতল উর্দ্ধমুখী বা নিম্নমুখী রূপ থাকবে যখন $f''(x) > 0$ এবং $f''(x) < 0$ (প্রদত্ত P (x, y) বিন্দুর প্রেক্ষিতে)।

বিশেষভাবে উল্লেখযোগ্য যে নেতিবাচক দিক থেকে অবতলের ধারণা থেকে উত্তলের ধারণার জন্ম বলে উপরোক্ত শর্তের ধনাত্মক দিকের ভাবনা বক্ররেখার উর্দ্ধমুখী বা নিম্নমুখী উত্তল হওয়ার সম্ভাবনাকে উজ্জ্বল করে।

প্রসঙ্গত: $y = f(x)$ বক্ররেখার P বিন্দুতে স্থান চ্যুতি ঘটার শর্ত হ'ল : $f''(x) = 0$

বক্রের কোনো বিন্দুতে উর্দ্ধমুখী (বা নিম্নমুখী) উত্তল অথবা উর্দ্ধমুখী (বা নিম্নমুখী) অবতল হওয়ার প্রকৃতিগত ধারণা থেকে অরৈখিক অপেক্ষকের চরম ও অবম মান প্রাপ্তি সমস্যার সমাধান সূত্রের সন্ধান পাওয়া যায়। এই ধারণা থেকে আমরা সম্ভাবনা তত্ত্বে, অর্থনীতির বিবিধ সমস্যায় সমাধানের রাস্তা বা উপায় খুঁজে বার করি। এখান থেকেই পরবর্তী ধাপে 'Quasi - concave' (প্রায় -অবতল) এবং Unimodality function (একক সংখ্যাগরিষ্ঠতা অপেক্ষক) -এর আলোচনার সূত্রপাত ঘটে।

উদাহরণ :

(1) প্রমাণ করুন যে $y = \log x (x > 0)$ সর্বত্র উর্দ্ধমুখী উত্তল (Convex upwards)

সমাধান ঃ এস্থলে $y = \log x (x > 0)$

$f'(x)$ বা $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ এবং $f''(x)$ বা $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}$

এক্ষেত্র প্রদত্ত শর্তানুসারে, $x > 0$, সুতরাং $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

(x এর সমস্ত মানের জন্য) সুতরাং প্রদত্ত বক্ররেখাটি উর্দ্ধমুখী উত্তল (Convex-upwards) অথবা 'নিম্নমুখী অবতল' (Concave downwards) যখন $x > 0$.

(2) $y = f(x)$ বক্ররেখার ক্ষেত্রে, $\mathrm{P}(x, y)$ বিন্দুতে কোটির পাদ বিন্দু (foot of the ordinate)

সাপেক্ষে উত্তল (convex) বা অবতল (concave) হওয়ার যথাক্রমে শর্ত হ’ল যদি, $y\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ অথবা $y\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ হয়।

এই শর্তকে কেন্দ্র করে $y \equiv f(x) = 2\sqrt{ax}$ বক্ররেখার—উপরিস্থিত $\mathrm{P}(x,y)$ বিন্দুতে (কোটির পাদ- বিন্দুর প্রেক্ষিতে) ‘উত্তল’ কিংবা ‘অবতল’ তা নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ এক্ষেত্রে, $y = 2\sqrt{ax} = 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2\sqrt{a}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$$ এবং

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= \sqrt{a}\cdot\frac{d}{dx}\left(x^{-1/2}\right) = -\sqrt{a}\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-3/2}$$

$$= -\frac{\sqrt{a}}{2}\cdot\frac{1}{x^{3/2}}$$

সুতরাং $$y\frac{d^2y}{dx^2} = 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{x}\cdot\left(-\frac{\sqrt{a}}{2}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$$

$$= -\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{2} = -\frac{a}{x}.$$

$\therefore x > 0$ হলে, $y\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ [এস্থলে, $x < 0$ হলে $y = f(x)$ এর বাস্তবতা বিঘ্নিত হয়]

স্পষ্টতই, $\mathrm{P}(x,y)$ বিন্দুতে, $y \equiv f(x) = 2\sqrt{ax}$ বক্রের (P কেন্দ্রিক ক্ষুদ্রাঞ্চলে) ঐ বিন্দুর কোটির পাদবিন্দু সাপেক্ষে উল্লেখ করা যায় যে বক্ররেখাটি **অবতল**।

(3) প্রমাণ করুন যে $y \equiv f(x) = x^3$ বক্ররেখার ক্ষেত্রে $x = 0$ বিন্দুকে স্থানচ্যুত বিন্দু বা বাঁক

বদলের বিন্দু রূপে গণ্য করা যায়।

সমাধান ঃ এক্ষেত্রে, $y = x^3$.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 \text{ এবং } \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

যদি $x < 0$ (‘0’ -এর খুবই নিকটবর্তী হয়েও) হয় তবে $\frac{d^2y}{dx^x} < 0$ হয়। অতএব প্রদত্ত বক্ররেখার ‘নিম্নমুখী অবতল’ প্রবণতা লক্ষ্যণীয়। পুনরায় $x > 0$ (‘0’ -এর খুব নিকটবর্তী হয়েও) হলে $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ বলে, স্বাভাবিকভাবেই বক্ররেখার এক্ষেত্রে উর্দ্ধমুখী অবতল ভাব লক্ষ করা যায়। এই উভয় প্রকার প্রবণতা থেকে সহজেই $y = f(x)$ বক্ররেখার ক্ষেত্রে $x = 0$ বিন্দুকে ‘স্থানচ্যুত বিন্দু’ হিসাবে প্রমাণ করা যায়।

গাণিতিক দৃষ্টিকোণ থেকে, যদি বাস্তব ভেক্টর স্পেসের একটি উত্তল উপসেট (convex subset) হয় x এবং f অপেক্ষকটি $f : x \to \mathrm{R}$ হিসাবে সংজ্ঞায়িত তবে ‘f’ অপেক্ষকটিকে convex বা উত্তল হিসাবে ধরা হবে যখন কেবলমাত্র নীচের শর্তটি পালিত হবে :

$f(tx_1 + (1-t)x_2) \le tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$ যেখানে $x_1,\ x_2 \in x$ অর্থাৎ x_1, x_2 উভয়েই X সেটের সদস্য এবং সকল t (প্রচল বা পূর্ণকাংক Parameter) সর্বদা [0, 1] বন্ধ অবকাশে সীমাবদ্ধ যদি $x_1 \ne x_2$ এবং $t \in (0,1)$ [খোলা অন্তরালে (open interval)] হয় তবে f অপেক্ষকটি কঠোর ভাবে উত্তল আকারের হয় যখন

$f(tx_1 + (1-t)x_2) < tx_1 + (1-t)x_2$ এর অধীন।

উদাহরণস্বরূপ, $y \equiv f(x) = x^2$ [একটি চলযুক্ত অপেক্ষক] কে উত্তল অপেক্ষক হিসাবে গণ্য করা যায়।

অন্য দিক থেকে উল্লেখ করা যায় যে, f-অপেক্ষকটি (বাস্তব মানযুক্ত) কে সাধারণভাবে অবতল (concave) হিসাবে গণ্য করা হয় যখন একটি অবকাশে x, y -এর অবস্থানে এবং $\alpha \in$ (প্রচল) [0, 1] এর জন্য $f((1-\alpha)x + \alpha y) \ge (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y)$ শর্তটি পালিত হয়।

f অপেক্ষকটি কঠোরভাবে (strictly) অবতল (concave) হবে যখন

$f\left(\left(1-\alpha\right)x+\alpha y\right)>\left(1-\alpha\right)f\left(x\right)+\alpha f\left(y\right)$ । শর্তটি কার্যকরী হয় ধরে নিতে হবে যে (প্রচল) $\alpha\left(0,1\right)$ এবং $x\neq y.$

সহজভাবে লক্ষণীয় যে উত্তল অপেক্ষক এর নেতিবাচক বা ঋণাত্মক ভাবের লক্ষণটিকে তুলে ধরে। উদাহরণ হিসাবে,

$y\equiv f\left(x\right)=\sqrt{x}\left(x>0\right)$ কে অবতল অপেক্ষক হিসাবে চিহ্নিত করা যায়।

2.5 প্রায়-অবতল অপেক্ষক

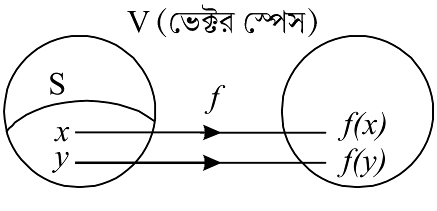
অরৈখিক অপেক্ষকের চরম/অবম মান প্রাপ্তির আকাঙ্খা পূরণের দিকটা তুলে ধরে প্রায়-অবতল অপেক্ষকের বৈশিষ্ট্য-রাজি। সংজ্ঞা হিসাবে একটি প্রায় -অবতল অপেক্ষক (Quasi-Concave function) কে আমরা এমন একটি অপেক্ষক রূপে চিহ্নিত ক'রব যার **নেতিবাচক** (অর্থাৎ ঋণাত্মক ভাবের) দিকটি হবে প্রায় উত্তল (quasi-convex) অপেক্ষক।

সুতরাং, অপেক্ষক f : S $\rightarrow$ R, প্রকৃতিপক্ষে V ভেক্টর স্পেসের অবতল সাসসেট S তে সংজ্ঞায়িত সকলের জন্য যদি প্রায় অবতল (quasi concave) হয়, তখন $x, y\in s$ এবং (প্রচল) $\lambda\in\left[0,1\right]$ এর জন্য আমরা নিম্নোক্ত সম্পর্কটি উল্লেখ ক'রব :

$f\left(\lambda x+\left(1-\lambda\right)y\right)\geq\min\left\{f\left(x\right),f\left(y\right)\right\}$ এবং কঠোরভাবে (Strictly) অবতীর্ণ প্রায় অবতল অপেক্ষকের জন্য $f\left(\lambda x+\left(1-\lambda\right)y\right)>\min\left\{f\left(x\right),f\left(x\right)\right\}$

সহজভাবেই উল্লেখ করা যায় প্রায় উত্তল (quasi convex) অপেক্ষকের ক্ষেত্রে,

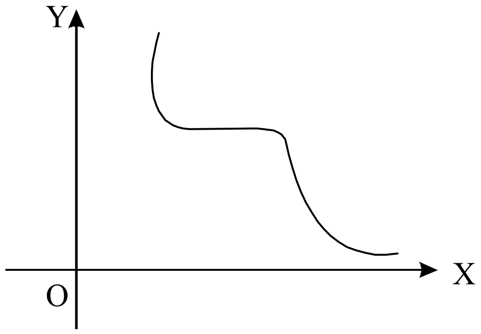
$$f\left(\lambda x+\left(1-\lambda\right)y\right)\leq\max\left\{f\left(x\right),f\left(y\right)\right\}$$



চিত্রানুসারে, উপরের উল্লিখিত সম্পর্কগুলিকে ব্যাখ্যা করা যায়।

সুতরাং যে অপেক্ষকের মধ্যে প্রায় -অবতল এবং প্রায় উত্তল উভয় সত্তাই বজায় থাকে তাকে প্রায়—রৈখিক (quasi-lniear) অপেক্ষক রূপে চিহ্নিত করা হয়।

চিত্রানুসারে,



দ্বিচলরাশির বেলায় স্বাভাবিক যৌথ ঘনত্ব প্রকৃতিগতভাবে প্রায়—অবতল অপেক্ষকের বৈশিষ্ট্যকেই তুলে ধরে। সম্ভাব্যতা ঘনত্ব-অপেক্ষকের সাধারণ বণ্টনের প্রায় অবতল অপেক্ষক কিন্তু পুরোপুরি অবতল ধরনের হয় না।

সামগ্রিকভাবে বলা যায় যে, সমস্ত অবতল (Concave) ধর্মের কার্যাবলি প্রায়-অবতল ধর্মাচরণ করে কিন্তু বিপরীত সর্বক্ষেত্রে সত্য হয় না। সে দিক থেকে দেখলে বলা যায় যে, প্রায়-অবতল অপেক্ষকটির মধ্যে অবতলের একটি সাধারণীকরণের প্রচেষ্টা ছাড়া আর কিছুই নয়।

প্রায় অবতল অপেক্ষকের উদাহরণ

(১) যে-কোনো একান্বয়ী (monotonic) অপেক্ষককে একযোগে প্রায়-অবতল অপেক্ষক এবং প্রায়-উত্তল অপেক্ষক রূপে গ্রহণ করা যায়।

(২) একটি অ-হ্রাস মান (non-decreasing) অপেক্ষক যথা : $g : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ অ-হ্রাস মান অপেক্ষক হলে যদি $f = h * g$ (অপেক্ষক দুটির সংযুক্তিকরণে) প্রায়-উত্তল প্রকৃতির হয়।

(৩) উদাহরণস্বরূপ, $y \equiv f(x) = \log x$ প্রায়-অবতল অপেক্ষকের আওতায় আসে।

শিল্পবাণিজ্যের বিভিন্ন ধারায়, অর্থনীতির বিভিন্ন ক্ষেত্রে, ক্রীড়াতত্ত্বে (game theory) প্রায়-অবতল (বা প্রায়-উত্তল) অপেক্ষকের প্রভূত প্রয়োগ লক্ষ করা যায়।

2.6 বাধাবিহীন শর্তের ক্ষেত্রে চরম/অবম (বা বিপরীত) ফল প্রাপ্তি

শর্ত সাপেক্ষে বাধাবিহীন চরম/অবম বা বিপরীতমুখী ফল প্রাপ্তি (Unconstrained optimization) সম্পর্কিত সমস্যার ক্ষেত্রে প্রধান উল্লেখযোগ্য ব্যাপারটি হল সমাধান ভেক্টর (Solution Vector) অর্থাৎ $(x_1, x_2, ..., x_n)$ সর্বদা বাধা (Constraint) নিরপেক্ষ বা বাধামুক্ত হবে। নিম্নোক্ত কারণগুলির মধ্যে এই

সত্যটি লুকিয়ে আছে ঃ—

(i) কিছু অত্যন্ত শক্তিশালী (powerful) এবং সহজলভ্য পদ্ধতিতে প্রাপ্ত বাধাযুক্ত (Constrained) চরম/অবম (বা বিপরীতমুখী) ফল প্রাপ্তির সমস্যার সমাধানে নজরে আসে বাধাবিহীন চরম/অবম (বা বিপরীতমুখী) ফল প্রাপ্তির সমস্যার রূপান্তর (transformation)।

(ii) বাধাযুক্ত চরম/অবম (বা বিপরীতমুখী) ফল প্রাপ্তির সমস্যার সমাধানের পদ্ধতি গুলির মধ্যে কতকগুলি প্রধান প্রয়োজনীয় ধারণা, বাধাযুক্ত চরম/অবম (বা বিপরীতমুখী) ফলপ্রাপ্তির সমস্যা সমাধানের প্রধান হাতিয়ার হয়ে ওঠে।

বাধাযুক্ত চরম/অবম (বা বিপরীতমুখী) ফল প্রাপ্তির সমস্যা সমাধানের বেশ কয়েকটি সুপরিচিত পদ্ধতির পরিচয় আমরা পেয়ে থাকি। তার মধ্যে কিছু পদ্ধতি সরাসরিভাবে সমাধান দেবার ক্ষেত্রে উল্লেখযোগ্য।

যেমন : 'Rosenbrock method', 'Simple method', 'Univariate method এবং 'Ramdom search method. Direct search method বা সরাসরি মূল্যায়ন পদ্ধতিতে কেবলমাত্র Objective function বা অভিপ্রেত অপেক্ষক প্রয়োজন চরম/অবম বা অবম/চরম মান নির্ধারণের জন্য অপেক্ষকের (একাধিক চল যুক্ত হওয়ায়) আংশিক অবকল (Partial derivative) নির্ণয় করার দরকার হয় না। সেই কারণে প্রায়শই এই পদ্ধতিকে 'Non-gradient method' বা 'আ-নতিযুক্ত পদ্ধতি' বলা হয়। কম সংখ্যক (একাধিক) চলের ক্ষেত্রে এই পদ্ধতিতে খুব সহজেই সমাধান পাওয়া যায়। পরবর্তী ক্ষেত্রে আরও গুরুত্বপূর্ণ পদ্ধতি হিসাবে আমরা পাই

Descent method বা 'অবরোহন পদ্ধতি' কে। এদের মধ্যে উল্লেখযোগ্য পদ্ধতিগুলি হ'ল :

(i) 'Steepest descent method' (চরম খাড়াই অবরোহন পদ্ধতি)

(ii) 'Conjugate gradient method' (সংযুক্ত নতি পদ্ধতি)

(iii) Newton's method (নিউটনের পদ্ধতি)

(iv) Davidon-Fletcher-Powell method (ডেভিডন-ফ্লেচার-পাওয়েল পদ্ধতি)

এই পদ্ধতিগুলিতে প্রয়োজনীয় অংশ হ'ল অভিপ্রেত অপেক্ষক (Objective function) নির্ধারণ এবং তৎসহ প্রথম ও তার অধিক ক্রমের অবকল গুণাংকের উপস্থিতি। এই পদ্ধতিতে অপেক্ষকের প্রাপ্ত ফল প্রথমে উল্লিখিত পদ্ধতি অপেক্ষা অধিক মাত্রায় অপেক্ষক সম্পর্কে সংবাদ বহন করে এবং অবকল গুণাংকের ব্যবহারের মাধ্যমে অপেক্ষকটির চরম/অবম (বা বিপরীতমুখী) ফল প্রাপ্তিকে সুচারুভাবে পরিবেশন করে। সেই জন্য 'Descent method' বা অবরোহণ পদ্ধতিকে অনেকে **'Gradient method'** বা **'প্রবণতা (বা নতি)** যুক্ত' পদ্ধতি হিসাবে অভিহিত করেন।

দ্বিঘাত কার্যক্রমের সমস্যা সমাধানে 'Kuhn–Tucker' এর শর্তাবলি :

চরম মান প্রাপ্তির ক্ষেত্রে

অপেক্ষক $f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{jk} x_j x_k$

বস্তুনিষ্ঠ চলের বাধাযুক্ত শর্ত হল

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i=1,2,.....,m.$$

এবং $x_j \ge 0,\ j=1,2,....,n;$

যখন $c_{jk}=c_{kj}$, সমস্ত j ও k এর জন্য হ্রাসসূচক (slack) চলরাশি q_i^2 এবং r_j^2 আর্বিভাবের ফলে সমস্যাটির আকার হয় নিম্নরূপ :

f -এর চরম মানের জন্য,

$$f=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{jk} x_j x_k$$

নিম্নোক্ত শর্তসাপেক্ষে

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i + q_i^2 = 0,\ i=1,2,.....,m$$

$$-x_j + r_j^2 = 0,\ j=1,2,....n.$$

এখন প্রদত্ত ল্যাগ্রাঞ্জীয় অপেক্ষকটি হ'ল

$$\mathrm{L}\left(x_1,x_2,....,x_n,q_1,q_2,...,q_m,r_1\ r_2,....,r_n,\lambda_1,\lambda_2,....,\lambda_n,\mu_1,\mu_2,...,\mu_n\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{jk} x_j x_k - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_j + q_i^2\right) - \sum_{j=1}^{n}\mu_j\left(-x_j + r_j^2\right).$$

এখন Kuhn-Tucker -এর প্রদত্ত শর্তাবলি হ'ল :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ij} - \mu_j(-1) = 0,\ = 1,2,....,$$

$$\lambda_i\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-b_i\right)=0,\ i=1,2,....$$

$$\mu_j x_j=0,\ j=1,2,...,n$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_j,\ i=1,2,....m$$

$$x_j\ge 0,\ j=1,2,...,n$$

$$\lambda_i\ge 0,\ i=1,2,.....,m$$

$$\mu_j\ge 0,\ j=1,2,...,n$$

ধরি, $q_i^2=s_i\ge 0,$ উপরোক্ত সমীকরণসমূহ হয় নিম্নরূপ :

$$c_j+\sum_{k=1}^{n}c_{jk}x_k-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ij}+\mu_j=0$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-b_i+s_i=0,\ i=1,2,.....,m$$

$$\lambda_i s_i=0,\ i=1,2,....,m$$

$$\mu_j x_j=0,\ j=1,2,....,n$$

$$\lambda_i\ge 0,\ i=1,2,....,m$$

$$\mu_j\ge 0,\ j=1,2,....,n$$

$$x_j\ge 0,\ j=1,2,.....,n$$

$$s_i\ge 0,\ i=1,2,...,m$$

(1) নং ব্যবস্থা (system) থেকে প্রাপ্ত $(m+n)$ রৈখিক সমীকরণগুলির মধ্যে উপস্থিত থাকে $x_i, x_j, b_i,$ এবং s_i

(1) নং থেকে প্রাপ্ত সমাধান অবশ্যই (2) নং ও (3) নং কে সিদ্ধ (satisfy) করে এবং এরাই দ্বিঘাত কার্যক্রমের সমস্যাটির (চরম) আকাঙ্খিত সমাধান হিসাবে পরিগণিত হয়।

Applications (প্রয়োগাবলি) ঃ

(1) যুদ্ধকালীন পরিস্থিতিতে অনেক সময় এলাকায় জন সাধারণের মধ্যে খাদ্য দ্রব্যের সরবরাহ নিয়মিতভাবে পরিচালিত হয় না। ঐ সময় খাদ্যদ্রব্যের মূল্য বৃদ্ধি পায় এবং খাদ্যদ্রব্যের সরবরাহ কম থাকার জন্য 'কুপন' (Coupon) পদ্ধতিতে মূল্য নিয়ন্ত্রিত হয় ক্রেতার মধ্যে। ক্রেতা যে পরিমাণ খাদ্যসামগ্রী নেবে তার ক্ষমতা (বা চাহিদা) অনুসারে তার একটা আর্থিক (monetary) মূল্য এবং যে একক খাদ্যদ্রব্য ক্রেতা কর্তৃক গৃহীত হবে তার জন্য দেয় কুপন মূল্য (Coupon price) ধার্য করা হয়। একে **'যুদ্ধকালীন রেশন বণ্টন'** প্রণালী বলে।

এখানে Kuhn-Tucker পদ্ধতিতে সমস্যা সমাধানের রাস্তা রয়েছে। ব্যাপারটাকে একটু পরিস্কার ভাবে উল্লেখ করা যাক। মনে করি x ও y দু-প্রকার খাদ্যদ্রব্য ক্রেতার মধ্যে বন্টন করা হ'ল। ক্রেতার একটি নির্দিষ্ট সামর্থ্যের বিষয় এখানে জড়িয়ে থাকবে। ধরি তা হ'ল 'B' এবং ক্রেতা কর্তৃক ব্যবহৃত দ্রব্য x ও y এর অপেক্ষক অর্থাৎ Utility function U অর্থাৎ U (x, y)। যদি x ও y -এর জন্য ধার্য কূপন মূল্য যথাক্রমে C_x এবং C_y হয়, তবে ক্রেতার দিক থেকে U-এর চরম মান প্রাপ্তিজনিত সমস্যাটিকে নিম্নোক্তভাবে উল্লেখ করা যায়।

Max (U) [চরম (U)] = U (x, y)

অধীনস্থ বিধিনিষেধ মেনে যে শর্তাবলি আসে তা হ'ল

$$B \geq P_x(x) + P_y(y)$$

এবং $C \geq C_x(x) + C_y(y)$

অবশ্যই $x \geq 0$ এবং $y \geq 0$

এক্ষেত্রে ল্যাগ্রাঞ্জীয় অপেক্ষক (যার প্রয়োজন সর্বাগ্রে লাগে Kuhn-Tucker শর্তাবলিকে ব্যাখ্যা করতে) (Lagrangian function) কে নিম্নোক্ত উপায়ে প্রকাশ করে পাই :

$$L = U(x,y) + \lambda_1\left(B - P_x(x) - P_y(y)\right) + \lambda_2\left(C - C_x(x) - C_y(y)\right)$$

যেখানে প্রচল λ_1, λ_2 হ'ল ল্যাগ্রাঞ্জীয় গুণক যা ক্রেতার দিক থেকে আসা সাধ্যমূল্য এবং কুপন মূল্য জনিত বিধিনিষেধের শর্তের উপর নির্ভরশীল। এস্থলে Kuhn-Tucker নিয়োজিত শর্তগুলি হ'ল:

$$L_x = U_x - \lambda_1 P_x - \lambda_2 C_x = 0$$

$$L_y = U_y - \lambda_1 P_y - \lambda_2 C_y = 0$$

$$L_{\lambda_1} = B - P_x(x) - P_y(y) \geq 0, \lambda_1 \geq 0$$

$$L_{\lambda_2} = C - C_x(x) - C_y(y) \geq 0, \ \lambda_2 \geq 0$$

গাণিতিক দৃষ্টিকোণ থেকে একটি সমস্যার ব্যাখ্যা ঃ

ধরি, ক্রেতার দিক থেকে আসা দ্রব্যের উপযোগ অপেক্ষকের (Utility function) আকার U (x, y) = $x \cdot y^2$

ধরি, B = 100, P_x = 1, P_y = 1 যখন C = 120 এবং C_x = 2, C_y = 1.

এক্ষেত্রে ল্যাগ্রাঞ্জীয় অপেক্ষকটিকে ‘L’ হিসাবে ধরে পাই

$$L = xy^2 + \lambda_1(100 - x - y) + \lambda_2(120 - 2x - y)$$

যখন প্রচল λ_1, λ_2 হ’ল ল্যাগ্রাঞ্জীয় গুণক যা ক্রেতা দ্বারা ঘোষিত সাধ্য মূল্য এবং গৃহীত কুপন মূল্যের বিধিনিষেধের শর্তের উপর নির্ভরশীল। এক্ষেত্রে Kuhn Tucker এর শর্তাবলি হ’ল :

$$L_x = y^2 - \lambda_1 - 2\lambda_2 \leq 0, x \geq 0, x \cdot L_x = 0$$

$$L_y = 2xy - \lambda_1 - \lambda_2 \leq 0, y \geq 0, y \cdot L_y = 0$$

$$L_{\lambda_1} = 100 - x - y \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \lambda_1 \cdot L_{\lambda_1} = 0$$

$$L_{\lambda_2} = 120 - 2x - y \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_2 \cdot L_{\lambda_2} = 0$$

সমস্যার সমাধান ঃ এই সমস্যা সমাধানের জন্য দ্রব্যের পরিমাণগত নির্দিষ্ট কারণে ‘Trial and error’ পদ্ধতি কাজে লাগানো হয়। এস্থলে আমরা যে-কোনো একটি নিষেধ আরোপিত শর্তকে মুক্ত (non-binding) আকারে রেখে x ও y কে সমাধান ক’রব।

প্রাথমিক স্তর ঃ ধরি, $\lambda_2 = 0, \lambda_1 > 0$

কুপনজনিত শর্তকে গণ্য না করে, প্রথম ক্রমের শর্তাবলি হ’ল

$$L_x = y^2 - \lambda_1 = 0$$

$$L_y = 2xy - \lambda_1 = 0$$

$$L_{\lambda_1} = 100 - x - y = 0$$

সমাধান করে x ও y এর প্রাপ্ত মানগুলি হ’ল

$x^* = 33{\cdot}33$ এবং

$y^* = 66{\cdot}67$

এই সমাধানযোগ্য মান দুটিকে কুপনজনিত নিষেধ শর্তে স্থাপন করে পাই,

$$2(33{\cdot}33)+66{\cdot}67=133{\cdot}67>120$$

এই সমাধানটি কুপন-নিষেধ শর্তকে সিদ্ধ করে।

দ্বিতীয় স্তরে ঃ ধরি, $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$

এখন প্রথম ক্রমের শর্তাবলি ঃ

$$L_x = y^2 - 2\lambda_2 = 0$$

$$L_y = 2xy - \lambda_2 = 0$$

$$L_{\lambda_2} = 120 - 2x - y = 0$$

সমীকরণগুলিকে সমাধান করে পাই

$x^* = 20$ এবং $y^* = 80$

এক্ষেত্রে বাজেট নিষেধ শর্তকে মান্যতা দেওয়া হয়েছে।

প্রয়োজনে লেখচিত্রের সাহায্য নেওয়া যেতে পারে।

(2) Kuhn-Tucker পদ্ধতিতে আরোপিত শর্তাবলিকে আমরা 'Peak-Load-Pricing' পদ্ধতিতে Peak অথবা 'Off Peak' অর্থাৎ সর্বোচ্চ চাহিদা এবং সর্বনিম্ন চাহিদা সাপেক্ষে সকল-কলেজের ক্লাশ পরিচালনার সময়সীমা [অর্থাৎ দিবা ভাগে (Peak) এবং নৈশকালীন (Off Peak) আকারে—] স্থির করতে পারি। বিনোদনের ব্যবস্থায় আমরা কোনো সময় বেশি দর্শক পাওয়া যাবে, কোন্ সময় কম দর্শক উপস্থিত থাকবে এবং তা থেকে আয়ের প্রশ্নটিকে Kuhn-Tucker পদ্ধতিতে সমাধান ক'রতে পারি।

Kuhn-Tucker শর্ত সাপেক্ষে নিম্নোক্ত সমস্যাটিকে সমাধান করুন :

Max Z (চরম (Z)) = $5+8x_1+12x_2-4x_1^2-4x_2^2-4x_3^2$

অধীনস্থ শর্তাবলি হ'ল

$$x_1 + x_2 \le 1$$

$$2x_1 + 3x_2 \le 6$$

বিধিনিষেধের শর্তাবলি হ'ল ঃ

$g_1 = x_1 + x_2 \le 1$

$g_2 = 2x_1 + 3x_2 \le 6$

Kuhn-Tucker এর প্রয়োজনীয় শর্তাবলি :

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} + \lambda_1 \frac{\partial g_i}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_i} = 0,\ i = 1, 2, 3$$

$$\lambda_j \left[g_j - b_j \right] = 0,\ j = 1, 2$$

$$\lambda_j \le 0,\ j = 1, 2 \left[g_j \le b_j, j = 1, 2 \right]$$

$$8 - 8x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0.....(1)$$

$$12 - 8x_2 + \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0....(2)$$

$$-8x_3 = 0.....(3)$$

$$\lambda_1 \times (x_1 + x_2 - 1) = 0.....(4)$$

$$\lambda_2 \times (2x_1 + 3x_2 - 6) = 0.....(5)$$

$$\therefore x_1 + x_2 - 1 \le 0....(6)$$

$$2x_1 + 3x_2 - 6 \le 0....(7)$$

$$\lambda_1 \le 0....(8)$$

$$\lambda_2 \le 0....(9)$$

চারটি ক্ষেত্র (case) উঠে আসে ঃ

প্রথম ক্ষেত্র : $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$

দ্বিতীয় ক্ষেত্র : $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \ne 0$

তৃতীয় ক্ষেত্র : $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$

চতুর্থ ক্ষেত্র : $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$

প্রথম ক্ষেত্র থেকে পাই, $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$

এখন (1) নং থেকে পাই, $x_1 = 1$

এবং (2) নং থেকে পাই, $x_2 = 3/2$

এই মান দুটি (6) নং কে সিদ্ধ (satisfy) করে না।

সুতরাং ইহা পরিত্যাজ্য।

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে : $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$

(5) নং সম্পর্ক থেকে পাই, $2x_1 + 3x_2 - 6 = 0....(10)$

(1) নং থেকে পাই, $8 - 8x_1 + 2\lambda_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \left(\frac{\lambda_2 + 4}{4}\right)....(11)$

(2) নং থেকে পাই, $12 - 8x_2 + 3\lambda_2 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{3\lambda_2 + 12}{8}......(12)$

(11) নং ও (12) নং সম্পর্ক দুটির সাহায্যে (10) নং থেকে পাই

$$2\left(\frac{\lambda_2 + 4}{4}\right) + \frac{3}{8}(3\lambda_2 + 12) - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_2 + 4}{2} + \frac{9\lambda_2 + 36}{8} - 6 = 0$$

$$\Rightarrow 4\lambda_2 + 16 + 9\lambda_2 + 36 - 48 = 0$$

$$\Rightarrow 13\lambda_2 + 52 - 48 = 0$$

$$\Rightarrow 13\lambda_2 = -4$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = -4/13 < 0$$

(11) নং থেকে পাই, $x_1 = -\frac{1}{13} + 1 = \frac{12}{13}$

(12) নং থেকে পাই, $x_2 = -\frac{12}{104} + \frac{12}{8} = \frac{18}{13}$

এই x_1 এবং x_2 (6) নং কে সিদ্ধ করে না সুতরাং এই মান দুটিও পরিত্যাজ্য।

তৃতীয় ক্ষেত্রে, $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$

(4) নং থেকে পাই, $x_1 + x_2 - 1 = 0......(3)$

(1) নং থেকে পাই, $8 - 8x_1 + x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\lambda_1 + 8}{8}.....(14)$

(2) নং থেকে পাই, $12 - 8x_2 + \lambda_1 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{\lambda_1 + 12}{8}...(15)$

(13) নং সম্পর্কে (14) এবং (15) কে ব্যবহার করে পাই,

$\lambda_1 = -6$

(14) এবং (15) থেকে পাই, $x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{3}{4}.$

(3) নং থেকে পাই, $x_3 = 0$

$\therefore x_1 = 1/4, x_2 = 3/4, x_3 = 0$

এই মানগুলি (6) নং ও (7) নং কে সিদ্ধ করে। ফলে এখান থেকেই Max z (চরম (z)) -এর মান হিসাবে পাই $\frac{27}{2}$ বা 13·5. **উত্তর** : 13·5

[বি. দ্র. Max·z $= 5 + 8\left(\frac{1}{4}\right) + 12\left(\frac{3}{4}\right) - 4\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 4\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 0$

$$= 5 + 2 + 9 - \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = 16 - \frac{10}{4} = \frac{64 - 10}{4} = \frac{54}{4} = \frac{27}{2} = 13{\cdot}5]$$

2.7 হেসিয়ান নির্ণায়কের ভূমিকা

ধরি f : R^n → R একটি এমন অপেক্ষক যার বস্তু সেটের $x \in \mathrm{R}^n$, একটি ভেক্টর এবং প্রতিবিম্ব সেটের $f(x) \in \mathrm{R}$ (object set) একটি স্কেলার। দ্বিতীয় ক্রমের আংশিক (Image set) অবকল গুণাংক

-অপেক্ষক f -এর জন্য অস্তিত্ব যুক্ত এবং অপেক্ষক এটি বস্তু সেটের উপর সন্ততা বজায় রাখে। এখন H ম্যাট্রিক্স বা [H] যা f -এর উপর দ্বিতীয় ক্রমের আংশিক অবকল গুণাংকের মাধ্যমে গঠিত (যা অনেক সময় $[H_f]$ হিসাবে চিহ্নিত) তার পরিচয়টি নিম্নরূপ :

$$[\mathrm{H}] \text{ or } [\mathrm{H_f}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \cdots\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 d x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \cdots\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \cdots\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

i এবং j সূচকের মাধ্যমে f -এর দ্বিতীয় ক্রমের আংশিক অবকল-সহগ কে সমীকরণ আকারে লিখে পাই,

$$[\mathrm{H}]_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

এস্থলে উল্লেখযোগ্য যে [H] একটি প্রতিসম (symmetric) ম্যাট্রিক্স এবং অপেক্ষক f এর দ্বিতীয় ক্রমের আংশিক অবকল-সহগ সন্ততা শোয়ার্জ-উপপাদ্যানুসারে অবকলের ক্রমের উপর নির্ভরশীল নয়। [H] -এর নির্ণায়কটিকে | H | হিসাবে চিহ্নিত করা হয় এবং একেই বলা হয় হেসিয়ান- নির্ণায়ক (Hessian determinant) যার সঙ্গে গণিতজ্ঞ (Otto) Hesse (অটো হেসে) -এর নাম সংযুক্ত।

এখন আমরা এই হেসিয়ান নির্ণায়কের কী ভূমিকা তা নিয়ে আলোচনা ক'রব।

আমরা জানি যে অপেক্ষক $f(x)$, x_0 নিশ্চল বিন্দু (Stationary point) -তে চরম (max) অথবা অবম মান গ্রহণ ক'রবে যদি নিম্নোক্ত শর্ত দুটি সঠিকভাবে পূরণ করা হয়। সর্বপ্রথম $[\mathrm{H}]_{\mathrm{x0}}$ নির্ণয় করতে হবে। তারপর $|H|_{x_0}$ অর্থাৎ X_0 বিন্দুতে হোসিয়ান-নির্ণয়কের প্রধান মাইনর (main) (principal) নির্ণয় করে বুঝতে হবে $|H|_{x_0}$ নিশ্চিত ধনাত্মক (positive difinite) রূপে আছে অথবা নিশ্চিত ঋণাত্মক (negative) রূপে আছে।

এখন নীচের শর্ত দুটি বলবে $f(x), x_0$ বিন্দুতে চরম অথবা অবম মানের কোনটির অধিকারী।

শর্ত (১) : $f(x), x_0$ নিশ্চল বিন্দুতে **চরম মান** গ্রহণ করে যখন $[\mathrm{H}]_{x_0}$ বা $|H|_{x_0}$ নিশ্চিত ঋণাত্মক (negative definite) হয়।

শর্ত (২) : $f(x), x_0$ নিশ্চল বিন্দুতে **অবম মান** গ্রহণ করে যখন $[\mathrm{H}]_{x_0}$ (বা $|H|_{x_0}$) নিশ্চিত ধনাত্মক (positive definite) রূপে প্রকাশিত হয়।

আমরা নিচের উদাহরণটিকে অনুসরণ ক'রতে পারি।

[এ কথা অনস্বীকার্য যে যদি $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ একটি n × n ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স হয় তবে প্রথম প্রধান মাইনর হয় $A_1 = a_{11}$, দ্বিতীয় প্রধান মাইনর হয় $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ এবং $A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ তৃতীয় প্রধান মাইনর হিসাবে আবির্ভূত হয়। এখন $A = [a_{ij}]$ ম্যাট্রিক্সটি

(i) নিশ্চিত ধনাত্মক (positive definite) রূপে ধরা দেয় যখন কেবলমাত্র $A_i > 0$, (i = 1,2,...., n)

(ii) নিশ্চিত ঋণাত্মক(negative definite) রূপে প্রকাশিত হয় যখন কেবলমাত্র $A_i < 0$, (i = 1,2,.., n)]

উদা. ধরি অপেক্ষক $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_3 + x_2x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$

f অপেক্ষকের ক্ষেত্রে চরম/অবম মান গ্রহণের জন্য প্রয়োজনীয় শর্ত হ'ল

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1 - 2x_1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_3 - 2x_2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 2 + x_2 - 2x_3 = 0$$

উপরোক্ত সমীকরণগুলিকে সমাধান করে পাই

X_0 (নিশ্চল বিন্দু হিসাবে) $= \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$

এখন $$[\mathrm{H}]_{x_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{bmatrix}_{x_0}$$

$$=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

এখন $[\text{H}]_{\times_0}$ থেকে গঠিত প্রধান মাইনর (minor) -গুলি (যা $|H|_{x_0}$ থেকে পাওয়া যায়) হ'ল

$$a_{11}=-2, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 \text{ এবং } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2).(4-2)-0+0$$

$$=(-2).(2)=-4$$

$\therefore$ প্রধান মাইনরের মানগুলি হল যথাক্রমে –2, 4 এবং –4

সুতরাং $|H|_{x_0}$ স্পষ্টতই নিশ্চিত ঋণাত্মক (negative definite) রূপে প্রকাশিত এবং X_0 নিশ্চল বিন্দু অর্থাৎ $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ বিন্দুতে প্রদত্ত অপেক্ষক f চরম মান (max value) গ্রহণ করে।

2.8 'লেখচিত্র' পদ্ধতিতে রৈখিক কার্যক্রমের সমস্যার সমাধান

দুটি নিস্পত্তিকারী চলকের মাধ্যমে রৈখিক কার্যক্রমের সমস্যাকে মূলত: লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করা হয়। তিন বা ততোধিক চলকের ক্ষেত্রে এই পদ্ধতিটি খুবই জটিল আকার ধারণ করে। সাধারণভাবে 'লেখচিত্র পদ্ধতিতে' দুটি অজানা চলরাশিকে আমরা গ্রহণ করে সমাধানযোগ্য চরম/অবম মান নির্ণেয় করব। প্রথমে প্রদত্ত বিধি নিষেধের শর্তাবলিতে উপস্থিত অসমীকরণগুলিকে সমীকরণ আকারে প্রকাশ করে তাকে $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ (সরলরেখার ছেদিতাংশ আকারে) প্রকাশ ক'রব। সমতলে অঙ্কিত OX_1 এবং OX_2 আয়তাকার অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে (0 কে মূল বিন্দু ধরে) প্রত্যেক সমীকরণের লেখচিত্র যথাযথভাবে অঙ্কন ক'রব। প্রত্যেক উপস্থিত বিন্দুর স্থানাংক হবে (x_1, x_2) আকারে। যদি অসমীকরণ (প্রদত্ত) '≤ 0' আকারের হয় তবে মূল বিন্দুর নিচের দিকের অঞ্চল এবং '≥ 0' আকারে অসমীকরণের ক্ষেত্রে মূলবিন্দুর

উর্দ্ধ দিকে রেখাঙ্কিত অঞ্চলকে চিহ্নিত ক'রব। প্রত্যেক ক্ষেত্রে, $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$। প্রথম পর্যায়ে (1st quadrant) শর্তসাপেক্ষে বিন্দুগুলিকে স্থাপন করে অঙ্কিত অঞ্চলের সাধারণ ভাগটি নিতে হবে। উত্তল সেটের প্রত্যেক প্রান্ত বিন্দু (সাধারন অঞ্চলে যা উপস্থিত) (corner point) অভিপ্রেত অপেক্ষকে (Z) objective function) বসিয়ে মানগুলি নির্ণয় করে তারপর মানগুলি পর্যবেক্ষণ করে max z বা min z কে নির্ণয় করা হয়। নীচের উদাহরণগুলি লক্ষণীয় :

উদা. 1 Min Z (অবম (Z)) = $3x_1 + 2x_2$

অধীনস্থ শর্তাবলি :

$5x_1 + x_2 \ge 10$

$2x_1 + 2x_2 \ge 12$

$x_1 + 4x_2 \ge 12$

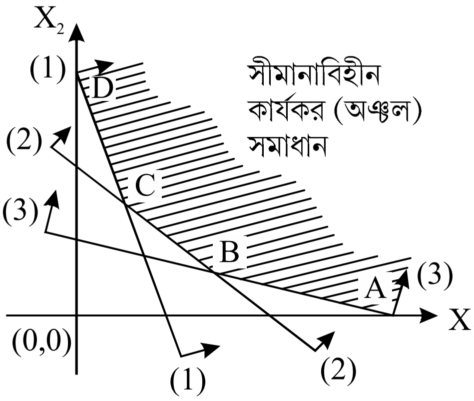
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

সমাধান ঃ অসমতা চিহ্ন বর্জন করে প্রদত্ত শর্তাবলি থেকে প্রাপ্ত সমীকরণগুলি হ'ল :

$$\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{10} = 1.....(1)$$

$$\frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{6} = 1....(2)$$

$$\frac{x_1}{12} + \frac{x_2}{3} = 1.....(3)$$



OX_1 এবং OX_2 অক্ষ দুটিকে O মূলবিন্দু সাপেক্ষ অঙ্কন ক'রলাম। (1), (2) ও (3) নং সমীকরণ গুলির চিত্র অংকন করে অসমতা চিহ্ন সাপেক্ষে এদের কারু সাধারণ সমাধান অঞ্চলকে রেখাঙ্কিত করা হ'ল। চিহ্ন (i) অনুসারে উত্তল অঞ্চল থেকে সমস্ত কার্যকরী সমাধান খোলা ABCD অঞ্চলে যা উপস্থিত তাদের চিহ্নিত করা হ'ল।

A, B, C এবং D এর কৌণিক বিন্দু যা ABCD অঞ্চলে উপস্থিত তাদের নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা হ'ল।

$A = (12,0),\ B = (4,2),\ C = (1,5)$ এবং $D = (0,10)$

$\therefore Z_A = 3 \times 12 = 36$

$Z_B = 3 \times 4 + 2 \times 2 = 16$

$Z_C = 3 \times 1 + 2 \times 5 = 13$

এবং $Z_D = 2 \times 10 = 20$

$\therefore \text{Min}(Z_A, Z_B, Z_C, Z_D)$ = পর্যবেক্ষণে, Z_A, Z_B, Z_C এবং Z_D -এর অবম মান = 13

সুতরাং Z_{min} (বা অবম Z)

= 13 যখন $x_1 = 1, x_2 = 5$

উদা. 2 Solve the following L.P.P. by graphical method (লেখাচিত্রের মাধ্যমে নিম্নোক্ত সমস্যাটির লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান নির্ণয় করুন)

Find : Max Z (চরম (Z) নির্ণয় করুন), যখন

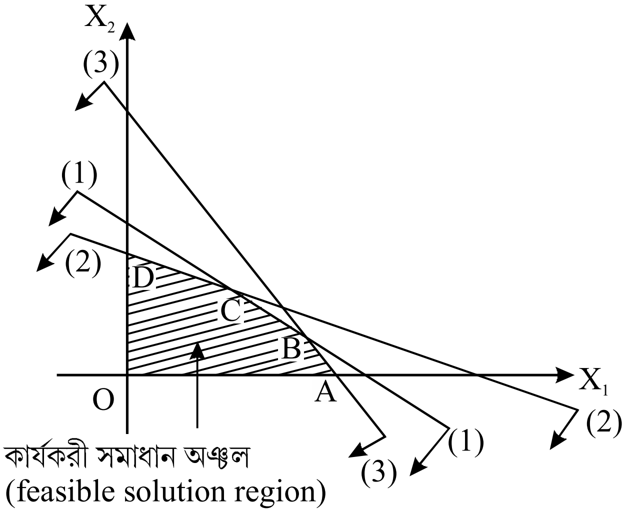
Max Z = $5x_1 + 7x_2$

নীচের বিধিনিষেধজনিত শর্তাবলি :

$x_1 + x_2 \leq 4$

$3x_1 + 8x_2 \leq 24$

$10x_1 + 7x_2 \leq 35$



সমাধান ঃ প্রদত্ত অসমীকরণগুলিকে সর্বপ্রথম সমীকরণ আকারে প্রকাশ করে পাই

$x_1 + x_2 = 4$ বা, $\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{4} = 1$

$3x_1 + 8x_2 = 24$ বা, $\frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{3} = 1$

$10x_1 + 7x_2 = 35$ বা, $\frac{x_1}{(7/2)} + \frac{x_2}{5} = 1$

এস্থলে, (1) নং সরলরেখাটি (4, 0) এবং (0, 4) বিন্দুগামী।

(2) নং সরলরেখাটি (8, 0) এবং (0, 3) বিন্দুগামী।

(3) নং সরলরেখাটি (3·5, 0) এবং (0, 5) বিন্দুগামী।

পূর্বের ন্যায় OX_1, OX_2 আয়তাকার অক্ষ দুটি এবং মূল বিন্দু (0,0) সাপেক্ষে প্রথম ধাপে অধীনস্থ শর্তাবলীর মাধ্যমে প্রদত্ত অসমীকরণগুলির লেখচিত্র অঙ্কন করে তাদের সাধারণ সমাধান অঞ্চল নির্ণয় করা হল। সম্ভাব্য সমাধান (feasible) অঞ্চল হ'ল 'OABCD'. [চিত্র (২) অনুসারে]

B এবং C যথাক্রমে $x_1 + x_2 = 4,$ ও $10x_1 + 7x_2 = 35$

এবং $3x_1 + 8x_2 = 24$ ও $x_1 + x_2 = 4$ এর ছেদ বিন্দু হিসাবে বর্তমান।

সমাধান করে পাই, B = (1·6, 2·3)

এবং C = (1·6, 2·4)

কৌণিক বা প্রান্তিক বিন্দুসমূহ : (Corner points)	Z এর মান (Value of Z) $= 5x_1 + 7x_2$
0 (0, 0)	0
A (3·5, 0)	17·5
B (1·6, 2·3)	24·1
C (1·6, 2·4)	24·8 [(চরম মান) (max. value)
D (0, 3)	21

Z -এর চরম মান = 24·8

যা C (1·6, 2·4) বিন্দুতে উপস্থিত।

সুতরাং চরম মান প্রাপ্তিকালে চলকগুলির মান $x_1 = 1{\cdot}6$ এবং $x_2 = 2{\cdot}4$ ।

❐ রৈখিক অপেক্ষকের চরম/অবম মান :

(1·1) Linear programming (L.P) একটি রৈখিক অপেক্ষকের (রৈখিক কার্যক্রম) ক্ষেত্রে রৈখিক সমতা এবং রৈখিক অসমতা চিহ্নযুক্ত বিধি নিষেধের আওতায় চরম/অবম মান নির্ধারণের জন্য যে কার্যক্রম প্রয়োগ করা হয় তাকেই "**রৈখিক কার্যক্রম**" (linear programming) বলা হয়। বস্তুত রৈখিক কার্যক্রম একটি বিশেষ কৌশল যার মাধ্যমে খুব সহজে সর্বোচ্চ লাভ বা ক্ষতির দিকটা রৈখিক সমীকরণ বা অসমীকরণের প্রদত্ত শর্তের অধীনে প্রদত্ত সমস্যার একটি গাণিতিক কাঠামোকে সুন্দরভাবে নিয়ন্ত্রণ করা যায়। নীচের উদাহরণটির মাধ্যমে আমরা সহজেই রৈখিক কার্যক্রমের প্রাথমিক ধারণাকে তুলে ধ'রতে পারব।

Z -এর চরম মান নির্ণয় করুন যখন

$z = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \ldots.(i)$

(ii) অধীনস্থ শর্তাবলি হ'ল

$4x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 3$

$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4$

$x_1 \geq 0_1$, $x_2 \geq 0$ এবং $x_3 \geq 0$

এস্থলে (i) নং থেকে অভিপ্রেত অপেক্ষক (Objective function) এবং (ii) নং এর অসমীকরণ গুলি হ'ল সমস্যার 'বিধিনিষেধ' (Constraints)। (ii) শর্ত সাপেক্ষে আমাদের x_1, x_2 এবং x_3 -এর মান নির্ণয় ক'রতে হবে যাতে z -এর চরম মান প্রাপ্তি হয়। এই একই পদ্ধতি অবলম্বনে নেতিবাচক দিক থেকে z 'চলের' অবম মান শর্তাবলির মাধ্যমে নির্ণয় করা যায়। রৈখিক কার্যক্রম (L.P.) -কে আমাদের জীবনের বিবিধ ধারায় বিভিন্ন গাণিতিক পরিকাঠামোর মাধ্যমে সহজ ও সরল সমাধান পেতে কাজে লাগিয়ে থাকি। যেমন : শিল্প, বাণিজ্য, অর্থনৈতিক লেনদেনের ক্ষেত্রে, পরিবহন সমস্যা ও আয়-ব্যয়ের সীমানা নির্ণয়ের জন্য। কারিগরি বিদ্যার বহুক্ষেত্রে এর প্রয়োগ লক্ষ করা যায়। এই ধারণাটিকে সর্বপ্রথম গাণিতিক রূপ দিয়ে কার্যকরী ভূমিকায় তুলে ধরেন রুশ গণিতবিদ L. Kantorovich। পরবর্তী ক্ষেত্রে বহু খ্যাতনামা গণিতজ্ঞ এই ক্ষেত্রে তাঁদের স্বকীয়তার পরিচয় দিয়ে বিষয়বস্তুকে আরও উজ্জ্বল এবং কার্যকরী ভূমিকায় তুলে ধরেন।

❒ বৃদ্ধিমুখী এবং হ্রাসমুখী চলরাশির ধারণা

রৈখিক সমস্যাজনিত কার্যক্রমে (L.P.P) সমস্ত শর্তাধীন বিধিনিষেধকে অনেক সময়েই অঋণাত্মক (non-negative) নতুন চলের সংযোজন ও বিয়োজন ঘটিয়ে মূল সমস্যার নিষেধাবলিকে সমীকরণ আকারে প্রকাশ করা হয়। যে নিষেধাবলিতে অসমতা চিহ্ন হিসাবে '$\leq$' ব্যবহৃত হয় তার ক্ষেত্রে অঋণাত্মক চল সংযোজিত করে অসমীকরণটিকে সমীকরণাকারে প্রকাশ করা হয় -এক্ষেত্রে যে অতিরিক্ত অ-ঋণাত্মক চলের আবির্ভাব ঘটল তাকেই বলা হয় "হ্রাসমুখী চল" বা "Slack Variable"। বিপরীতক্রমে, যদি অসমীকরণ '$\geq$' চিহ্ন ব্যবহৃত হয় তবে সেক্ষেত্রে অসমীকরণটিকে সমীকরণ আকারে প্রকাশের জন্য যে অ-ঋণাত্মক (মূল চলক ব্যতীত) চলের বিয়োজন ঘটে তাকে বলা হয় বৃদ্ধিমুখী বা বৃদ্ধিজনিত চল বা Surplus Variable.

নীচের উদাহরণটি লক্ষণীয় :

ধরি, রৈখিক কার্যক্রমের সমস্যাটি হ'ল

Min Z (বা অবম Z) = $2x_1 - x_2 + x_3$

অধীনস্থ বিধিনিষেধজনিত শর্তাবলি হ'ল ঃ

$2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1$

$x_1 - 2x_3 + x_3 \geq 2$

$x_2 - x_3 \leq 3$

$x_1, x_2,$ এবং $x_3 \geq 0$ (প্রত্যেকে)

উপরোক্ত সমস্যার রৈখিক কার্যক্রমের প্রামাণিক (standard) রূপটি হ’ল ঃ

Min Z (বা অবম Z) = $2x_1 - x_2 + x_3$

নিষেধের অধীনস্থ শর্তগুলি হ’ল :

$2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1$

$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_5 = 2$

$x_1 - x_3 + x_6 = 3$

এস্থলে $x_4 (\geq 0)$ এবং $x_6 (\geq 0)$ চলক গুলি Slack Variable বা হ্রাসমুখী চলক এবং $x_5 (\geq 0)$ চলকটি হ’ল বৃদ্ধিসূচক বা বৃদ্ধিমুখী চলক (Surplus Variable)।

(1·4) Convex Set (উত্তল (বা ঋজুতাবিহীন) সেট) বা বক্র

$S \cap R^n$ [যখন S একটি সেট এবং R^n হ’ল n মাত্রিক ইউক্লিডীয় সমতল] সেটটিকে উত্তল (বা বক্র) সেট (Convex Set) বলা হবে যদি x_1, x_2 সদস্য দুটি S সেটের মধ্যে এমনভাবে অবস্থান করে যাতে $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$ (বা $\lambda x_2 + (1-\lambda) x_1$) S সেটের সদস্য হিসাবে গণ্য হয় যখন প্রচল (Parameter) রূপে উপস্থিত সকল λ, বদ্ধ অবকাশ অর্থাৎ [0, 1] -এর মধ্যে বিদ্যমান।

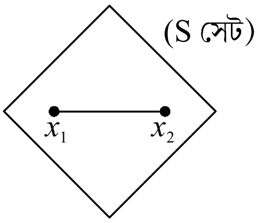
উপরোক্ত সংজ্ঞা থেকে নিম্নোক্ত তথ্যগুলি সহজেই পাওয়া যায় :

(i) যদি $x_1, x_2 \in s$, (যেখানে $x_1 \neq x_2$) তবে x_1 এবং x_2 সংযোজক সরলরেখাংশ পুরোটাই S সেটের ভিতরে অবস্থান করবে।

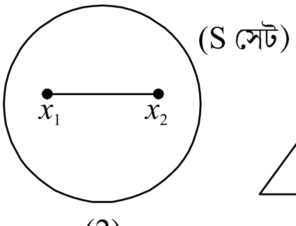
(ii) শূন্য সেট (empty set) বা একপদী (singleton) সেট সর্বদা উত্তল সেট হিসাবে গণ্য হবে।

(iii) উত্তল (বা বক্র) সেটের অভ্যন্তরে কোন গর্ত বা ছিদ্র (hole) থাকবে না।

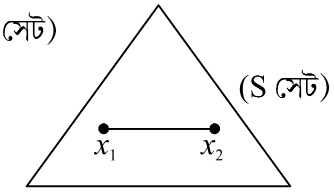
উদাহরণ ঃ



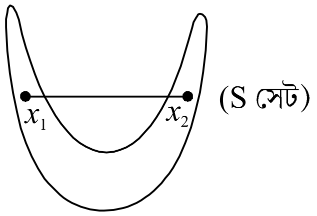
(1)



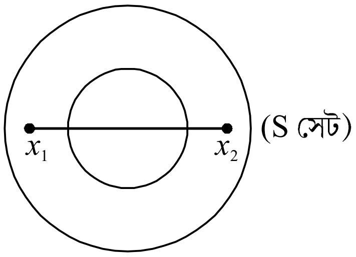
(2)



(3)



(4)



(5)

উপরের চিত্রণে (1), (2), (3) উত্তল সেটের উদাহরণ যখন (4) ও (5) চিত্র দুটি উত্তল সেটের অন্তর্গত নয়।

(1·5) The duality theorem (দ্বিত্ব উপপাদ্য)

1949 সালে ব্রাউন বিশ্ববিদ্যালয়ের অধ্যাপক ডেভিড গেল (David Gale) সর্বপ্রথম আলোকপাত করলেন যে, প্রত্যেক রৈখিক কার্যক্রমের সমস্যার মধ্যে একটি প্রতিচ্ছবি বা ছায়া লক্ষ করা যায় যাকে বলা হয় দ্বৈত রূপ বা dual। প্রথম রৈখিক কার্যক্রমের সমস্যাটিকে মূল বা প্রধান সমস্যা (Primal Problem) এবং ছায়া হিসাবে প্রাপ্ত সমস্যাটিকে দ্বৈত্ব সমস্যা (dual problem) হিসাবে ধরা হয়। যাই হোক, সমস্যা দুটির মধ্যে একটিকে অপরটির প্রতিচ্ছবি হিসাবে গণ্য করা হয়।

সুতরাং সহজেই অনুমান করা যায় যে, এই গাণিতিক কার্য একটি সমস্যা চরম মান প্রাপ্তি বিষয়ক হলে তার দ্বিত্বটি অবম মান প্রাপ্তি সম্পর্কিত হবে। বিপরীতক্রমে প্রথমটি অবম মান সংক্রান্ত হলে অপর ছবিটি সমস্যার চরম মান সংক্রান্ত হবে। এস্থলে, প্রধান উপপাদ্যটিকে আমরা নিবেদন করছি :

উপপাদ্য ঃ দ্বৈত সমস্যার উপর পুনরায় দ্বৈত রূপ গ্রহণ করলে প্রধান (বা প্রাথমিক) সমস্যাকেই ফেরৎ পাওয়া যাবে (The dual of the dual is the primal)।

আমাদের বক্তব্যের সমর্থনে নিচের উদাহরণটি উপযুক্ত হবে।

উদা. চরম Z বা max.Z = $2x_1 - 6x_2$

বিধিনিষেধের শর্তাবলি হ'ল :

$x_1 - 3x_2 \leq 6$

$2x_1 + 4x_2 \geq 8$

$x_1 - 3x_2 \geq - 6$

$x_1, x_2 \geq 0$

এই মূল সমস্যাটির দ্বৈত আকার লিখে প্রমাণ করতে হবে যে পর পর দুবার দ্বৈত রূপ প্রয়োগে, প্রধান বা মূল অবস্থাকেই ফেরৎ পাওয়া যায়।

সমাধান ঃ প্রথম স্তর : প্রদত্ত মূল সমস্যাটিকে নিম্নোক্ত আকারে প্রকাশ ক'রলাম। আমাদের X = [x_1, x_2] কে নির্ণয় করতে হবে যাতে চরম Z = CX হয় যখন অধীনস্থ শর্তাবলি হ'ল $AX \leq b,\ x \geq 0$, যেখানে

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix}$$ এবং C = (2 – 6)

দ্বিতীয় স্তর : রৈখিক সমস্যা সংক্রান্ত কার্যক্রমে W = [w_1, w_2, w_3] চলের নির্ধারণ দরকার যাতে $z_w = b^T w$, শর্তাবলি হ'ল $A^T W \geq C^T, W \geq 0$ ['T' দ্বারা ম্যাট্রিক্সের transpose কে বুঝান হয়েছে]

অর্থাৎ min Z_w (বা অবম Z_w)

$$= (6 - 8\ 6) \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = 6w_1 - 8w_2 + 6w_3,$$

অধীনস্থ শর্তাবলি হ'ল : $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}$

অর্থাৎ $w_1 - 2w_2 - w_3 \geq 2$

$-3w_1 - 4w_2 + 3w_3 \geq - 6$

যখন w_1, w_2 এবং w_3 প্রত্যেকেই শূন্য অথবা তার চেয়ে বড় (বা, ≥ 0)

তৃতীয় স্তর : মূল সমস্যার দ্বৈত (dual) রূপটি হ'ল

min Z_w (অবম Z_w) = $6w_1 - 8w_2 + 6w_3$

অধীনস্থ নিষেধের শর্তাবলি হ'ল

$w_1 - 2w_2 - w_3 \geq 2$

$-3w_1 - 4w_2 + 3w_3 \geq -6$

যখন $w_1 \geq 0,\ w_2 \geq 0,\ w_3 \geq 0.$

চতুর্থ স্তর ঃ উপরের দ্বৈত আকারটিকে নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করে পাই

$\max z'_w = 6w_1 + 8w_2 - 6w_3,$

অধীনস্থ নিষেধের শর্তাবলি হ'ল

$v_1 \quad -w_1 + 2w_1 + w_3 \leq -2$

$v_2 \quad 3w_1 + 4w_2 - 3w_3 \leq 6$

যখন $w_1 \geq 0,\ w_2 \geq 0,\ w_3 \geq 0.$

পঞ্চম স্তর : (1) নং সমস্যাটির উপর পর পর দুবার দ্বৈত রূপ প্রয়োগ করে পাই

$\text{Min } Z''_v = -2v_1 + 6v_2$

অধীনস্থ নিষেধের শর্তাবলি হ'ল

$-v_1 + 3v_2 \geq -6$

$2v_1 + 4v_2 \geq 8$

$v_1 - 3v_2 \geq -6,$

$v_1 \geq 0,\ v_2 \geq 0$

অর্থাৎ $\max z_v = 2v_1 - 6v_2$

অধীনস্থ বিধি নিষেধের শর্তাবলি হ'ল :

$v_1 - 3v_2 \leq 6$

$2v_1 + 4v_2 \geq 8$

$v_1 - 3v_2 \geq -6,$

$v_1 \geq 0,\ v_2 \geq 0$

পরিবর্তিত চল সাপেক্ষে (2) থেকে লক্ষণীয় যে, এটি মূল সমস্যাকেই (Primal Problem) তুলে ধরে।

সুতরাং, মূল সমস্যার উপর পরপর দুবার দ্বৈত রূপ প্রয়োগ করলে পূর্বের মূল সমস্যাটিকে ফিরিয়ে দেয়। **(প্রমাণিত)**

2.9 সংক্ষিপ্তসার

এই অধ্যায় পড়লে আমরা জানতে পারি—

- দ্বিঘাত কার্যক্রম সমস্যা
- কুন-টাকার শর্ত

2.10 অনুশীলনী

(একাধিক চলের অধীনে চরম/অবম মানপ্রাপ্তি বিষয়ক (আলোচনার প্রেক্ষিতে)

Q.1. নিচে উল্লিখিত সেটগুলি Convex/উত্তল বা বক্র) সেট কিনা তা আলোচনা করুন :

(i) $x = 0,\ y > 0$ এবং $y = 0,\ x > 0$ এদের সমন্বয়ে (Union) অর্ধ-সরলরেখায় বিরাজমান যা xy সমতলে অবস্থিত বিন্দু সমূহ

(ii) (0, 0), (0, 1), (1, 0) এবং (1, 1) বিন্দুসমূহ যারা xy সমতলে উপস্থিত।

Q.2. প্রমাণ করুন যে $x = \{(x_1, x_2) x_1 \leq 1$ এবং $x_1, x_2 \geq 0\}$ 'Convex set' (বক্র সেট) নয়।

Q. 3. প্রাপ্ত বা কৌণিক বিন্দু যারা চরম/অবম মানের অধিকারী তাদের অস্তিত্ব থাকলে তা নির্ণয় করুন :

(i) $S = \{(x_1, x_2); x_1 \leq 2, x_2 \leq 3,\ x_1 + x_2 \geq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$

(ii) $S = \{(x, y); |x \leq 1, y \leq 1|\}$

Q.4. রৈখিক কার্যক্রমের সমস্যার লেখচিত্রের মাধ্যমে সমাধান করুন :

(i) Max z (চরম (z)) $= x_1 + x_2$

বিধি নিষেধের অধীনস্থ শর্তাবলি :

$-2x_1 + x_2 \leq 1$

$x_1 \leq 2$

$x_1 + x_3 \leq 3,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

(ii) Min Z (অবম (Z)) $= 10x_1 + 5x_2$

অধীনস্থ শর্তাবলি :

$x_1 + 2x_2 \geq 2$

$3x_1 + x_2 \geq 3,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

লেখচিত্রের মাধ্যমে সমাধান করুন :

Q.5 Max·Z (চরম (Z)) $= 4x_1 + 3x_2$

অধীনস্থ শর্তানুসারে : $3x_1 + 4x_2 \leq 12$

$3x_1 + 3x_2 \leq 10$

$2x_1 + x_2 \leq 4,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

Q.6 Min.Z (অবম (Z)) $= x_1 + x_2$

অধীনস্থ শর্তাবলি : $x_1 + 2x_2 \geq 7$

$4x_1 + x_2 \geq 6,$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

Q.7 দ্বিত্ব (duality) নীতি প্রয়োগ করে নিম্নোক্ত রৈখিক কার্যক্রমের সমস্যাটিকে সমাধান করুন :

Max.Z (চরম (Z)) $= 3x_1 + 2x_2$

অধীনস্থ শর্তাবলি :

$x_1 + x_2 \geq 1$

$x_1 + x_2 \leq 7$

$x_1 + 2x_2 \leq 10$

$x_1 \leq 3,$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

অথবা নিম্নোক্ত রৈখিক কার্যক্রমের সমস্যাটিকে দ্বিত্ব (duality) নীতির মাধ্যমে সমাধান করুন :

Max Z (চরম (Z)) $= x_1 - x_2 + 3x_3$

অধীনস্থ শর্তাবলি :

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 10$$

$$2x_1 - x_3 \le 2$$

$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \le 6,$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

Q.8 পরীক্ষা করে দেখান যে

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2x_3 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 4x_2 + 4x_3$$

-এর (0, 3, 1), (0, 1, –1), (1, 2, 0), (2, 1, 1) এবং (2, 3, –1) বিন্দুগুলি স্থির (Stationary) বিন্দু হিসাবে বর্তমান।

প্রয়োজনীয় শর্ত (Necessary Conditions) প্রয়োগে অবম (min) মান নির্ধারণ করুন।

Q.9. ধরি, চরম ভাবে x, y দ্রব্যের উপযোগিতা (U) মূল্য, বাজেট (B) বিধিনিষেধের আওতায় হ’ নিম্নরূপ :

$$\text{Max } \mathrm{U} = \mathrm{U}(x, y)$$

অধীনস্থ শর্তাবলি $\mathrm{B} = \mathrm{P}_x(x) + \mathrm{P}_y(y)$

এবং $\bar{x} \ge x$

যখন রেশন x -এর উপর নির্ভরশীল এবং তা হ’ল $\bar{x}$.

ল্যাগ্রাঞ্জীয় অপেক্ষক $\mathrm{L} = \mathrm{U}(x, y) + \left(\mathrm{B} - \mathrm{P}_x(x) - \mathrm{P}_y(y)\right)\lambda_1 + (\bar{x} - x)\lambda_2$

নিষেধের গন্ডি বিবেচনায় থাকুক অথবা না থাকুক, এমত অবস্থায় Kuhn-Tucker শর্তাবলি কী হবে?

2.11 গ্রন্থপঞ্জি

- Ranajit Dhar, (2011) : Advanced Business Mathematics, Dishari Prakashani
- Mehta and Madnani, (2012) : Mathematics for Economists, Sultan Chand and Sons
- Sarkhel and Bhukta, (2010) : An Introduction to Mathematical Techniques for Economic Analysis, Book Syndicate Private Limited
- Agarwal, (2000) : Quantitative Methods, Vrinda Publications Pvt. Ltd.

একক 3 ❑ ক্রীড়াতত্ত্ব

গঠন

3.1 উদ্দেশ্য

বাস্তবে আমরা অনেক সমস্যা পাই যেখানে দুই বা ততোধিক প্রতিপক্ষের মধ্যে প্রতিযোগিতা এবং দ্বন্দ্ব বা স্বার্থের সংঘাত (conflict) লক্ষ করা যায়।

উদাহরণস্বরূপ দুই ব্যক্তির মধ্যে বা দুই দেশের মধ্যে বা দুই বাণিজ্যিক প্রতিষ্ঠানের মধ্যে এরূপ প্রতিযোগিতা লক্ষ করা যায়। এই ধরণের সমস্যাকে ক্রীড়া সমস্যা বলা হয় এবং ক্রীড়া তত্ত্বের বিষয় হল— আমাদের জানতে হবে প্রত্যেক পক্ষ তার প্রদত্ত কৌশলগুলি থেকে কোন্ কৌশল অনুসরণ করলে সেই পক্ষ (অন্যরা যে কৌশলই অবলম্বন করুক) সর্বাধিক লাভজনক অবস্থায় থাকতে পারে।

3.2 প্রস্তাবনা

ধরা যাক A এবং B দুজন ব্যবসাদার কোনো দেশের কোনো বিশেষ অঞ্চলে ইলেক্ট্রনিক জিনিসের ক্রয়-বিক্রয়ের ব্যবসা করছে এবং ধরে নেওয়া যাক্ যে ঐ অঞ্চলে ইলেক্ট্রনিক জিনিসের ক্রয়-বিক্রয়ের অন্য কোনো ব্যবসাদার নাই।

এখানে A এবং B -কে খেলোয়াড় এবং ব্যবসাটিকে একটি ক্রীড়া বলা হবে। মনে করুন, ব্যবসা নিয়ন্ত্রণ করার জন্য A ব্যবসাদারের তিনজন A_1, A_2, A_3 এবং B ব্যবসাদারের চারজন পরামর্শদাতা B_1, B_2, B_3, B_4 আছে। আমরা ধরে নেব যে, প্রত্যেক খেলোয়াড় (এখানে ব্যবসাদার) ব্যবসা নিয়ন্ত্রণের জন্য তার নিজের পরামর্শদাতাদের থেকে এক সঙ্গে মাত্র একজনের সাহায্য গ্রহণ করবে। যেমন, A কেবলমাত্র

A_3 এর সাহায্যে নিতে পারে এবং B কেবলমাত্র B_1 এর সাহায্য নিতে পারে। এই পরামর্শমণ্ডলী নির্বাচন প্রত্যেক ব্যবসাদারের (খেলোয়াড়ের) সম্পূর্ণ নিজের ব্যাপার এবং অপর প্রতিপক্ষ ব্যবসাদারের (খেলোয়াড়ের) পরামর্শমণ্ডলীর নির্বাচন এর ওপর নির্ভর করে না। মনে করুন, দুজন খেলোয়াড়ের নির্বাচিত কৌশলগুলি নীচে ছক্‌টিতে (যার ব্যাখ্যা পরে দেওয়া হয়েছে) দেওয়া আছে :

খেলোয়াড় B

		B_1	B_2	B_3	B_4
খেলোয়াড় A	A_1	5	2	– 4	2
	A_2	0	– 3	3	7
	A_3	3	3	2	– 1

এখানে মোট 12টি ছোট বর্গাকার ঘর আছে। এই ছকের (1, 1) ঘরের প্রদত্ত সংখ্যা হল 5-এর অর্থ হল যে যদি খেলোয়াড় A, A_1 কৌশল গ্রহণ করে এবং B, B_1 কৌশল গ্রহণ করে তাহলে এই খেলায় (এখানে ব্যবসায়) A-এর 5 একক লোকসান হবে অর্থাৎ আমরা বলতে পারি যে A, B যথাক্রমে A_1, B_1 কৌশল অবলম্বন করলে খেলোয়াড় A, খেলোয়াড় B-র কাছ থেকে 5 একক মূল্য পাবে। আবার (1, 3) ঘরটি বিবেচনা করা যাক। এই প্রদত্ত সংখ্যা (– 4) যার অর্থ হল যে যদি A, A_1 কৌশল অবলম্বন করে এবং B, B_3 কৌশল অবলম্বন করে তাহলে A-র – 4 একক লাভ হবে অর্থাৎ A-র 4 একক লোকসান হবে এবং B, A-র কাছ থেকে 4 একক মূল্য পাবে যা B-র লাভ।

এই ছক্ -এর (2, 1) ঘরে আছে 0— যার অর্থ হল যদি A, A_2 কৌশল গ্রহণ করে এবং B, B_1 কৌশল গ্রহণ করে তাহলে A ও B উভয় খেলোয়াড়ের কোনো লাভ বা লোকসান কিছুই হবে না। অনুরূপভাবে ছকটির বাকি যে-কোনো ঘরে প্রদত্ত সংখ্যার অর্থ পাওয়া যায়। এখানে খেলোয়াড় A (যার কৌশলগুলি সারণিতে দেখানো হয়েছে) -কে চরম লাভকারী খেলোয়াড় বলা হবে এবং খেলোয়াড় B (যার কৌশলগুলি স্তম্ভে দেখানো হয়েছে) অবম লোকসানকারী খেলোয়াড় বলা হবে। এখানে উপরের ছকটিকে চরম লাভকারী খেলোয়াড় A-র প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্স বলে। এই ছক-এর প্রত্যেক যে ছক পাওয়া যায় তা হবে অবম লোকসানকারী খেলোয়াড় B-র মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্স।

ক্রীড়া তত্ত্বের সাহায্যে A ও B উভয় খেলোয়াড়ের শ্রেষ্ঠ কৌশল নির্ণয় করা যায় যাতে চরম লাভকারী খেলোয়াড় A-র নিশ্চিত লাভের পরিমাণ সবচেয়ে বেশি। 1928 খ্রিস্টাব্দে J. V. Neumann এই তত্ত্বের সূচনা করেন এবং পরে G. B. Dantzig দ্বারা এই তত্ত্ব সমৃদ্ধ হয়।

পরবর্তী অনুচ্ছেদগুলিতে ‘‘প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্স’’, ‘‘যোগ্যতম ক্রীড়া কৌশল’’, ‘‘ক্রীড়া সমস্যার মান’’ ইত্যাদি ধারণাগুলিকে পরিস্কার করে বুঝিয়ে বলা হবে।

3.3 দুই ব্যক্তির শূন্য যোগফলবিশিষ্ট ক্রীড়া সমস্যা — প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্স এবং ক্রীড়া কৌশল

পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদে দুজন ব্যবসাদারের যে সমস্যা উল্লেখ করা হয়েছে সেক্ষেত্রে ব্যবসাটিকে একটি ‘‘ক্রীড়া’’ বলা হয়েছে। দুই বা ততোধিক প্রতিপক্ষের মধ্যে প্রতিযোগিতা এবং দ্বন্দ্ব আছে এমন যে-কোনো পরিস্থিতিকে আমরা ‘‘ক্রীড়া’’ বলব। এখানে প্রতিপক্ষকে ‘‘খেলোয়াড়’’ বলা হয়।

যে ক্রীড়ায় দুজন খেলোয়াড় থাকে এবং একজন খেলোয়াড়ের লাভ অপর খেলোয়াড়ের লোকসানের সমান সেই ক্রীড়াকে “**দুই ব্যক্তির শূন্য যোগফলবিশিষ্ট বা শূন্য সমষ্টি বিশিষ্ট ক্রীড়া**” বলে।

এখানে প্রত্যেক খেলোয়াড়ের পূর্বনির্ধারিত কয়েকটি পরিকল্পনা থাকে যেখানে প্রত্যেক খেলোয়াড় তার পূর্বনির্ধারিত পরিকল্পনাগুলি থেকে একসঙ্গে কেবলমাত্র একটি পরিকল্পনা গ্রহণ করবে। প্রত্যেক খেলোয়াড়ের এই পূর্বনির্ধারিত পরিকল্পনাগুলিকে সেই খেলোয়াড়ের ‘‘ক্রীড়া কৌশল’’ বলে। পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদে উল্লিখিত দুজন ব্যবসাদারের সমস্যার ক্ষেত্রে A ও B ব্যবসাদারদের (খেলোয়াড়দের) ক্রীড়া কৌশলগুলি হল যথাক্রমে A_1, A_2, A_3 এবং B_1, B_2, B_3, B_4।

যদি কোনো ক্রীড়ায় প্রত্যেক খেলোয়াড়ের ক্রীড়া কৌশলের সংখ্যা সসীম হয় তাহলে ক্রীড়াটিকে সসীম বলা হবে, নতুবা একে অসীম ক্রীড়া বলা হবে। আমরা ক্রীড়া বলতে “**দুই ব্যক্তির শূন্য যোগফল বিশিষ্ট সসীম ক্রীড়া**” বুঝব।

❐ প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্স

ধরা যাক কোনো ক্রীড়ায় A এবং B দুজন খেলোয়াড়। মনে করুন A-র প্রদত্ত ক্রীড়া কৌশলগুলি হল A_1, A_2, ... A_m এবং B-র প্রদত্ত ক্রীড়া কৌশলগুলি হল B_1, B_2 ....B_n। তাহলে এখানে A-র m সংখ্যক কৌশল এবং B-র n সংখ্যক কৌশল প্রদত্ত আছে। মনে করুন যদি A, A_i কৌশল ($i = 1, 2, ...m$) এবং B, B_j কৌশল ($j = 1, 2, ...n$) নির্বাচন করলে A-কে B যে অর্থমূল্য দেয় তার পরিমাণ অর্থাৎ A, A_i কৌশল এবং B, B_j কৌশল নির্বাচন করলে A-র লাভের পরিমাণ a_{ij} এবং B-র লোকসানের পরিমাণ a_{ij} বা B-র লাভের পরিমাণ $(-)\ a_{ij}$।

এক্ষেত্রে আমরা $m \times n$ ক্রমের প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্সটি পাই :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

এই ম্যাট্রিক্সটিকে প্রদত্ত ক্রীড়ার একটি প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্স বলে এবং ক্রীড়াটিকে নীচের আকারে প্রকাশ করা হয়।

খেলোয়াড় B

		B_1	B_2	....	B_n
	A_1	a_{11}	a_{12}	....	a_{1n}
	A_2	a_{21}	a_{22}	....	a_{2n}
খেলোয়াড় A		....	....	....	......
		....	....	....	......
	A_m	a_{m1}	a_{m2}	....	a_{mn}

এখানে খেলোয়াড় A-কে বলা হবে চরম লাভকারী যার লক্ষ্য হবে এমনভাবে কৌশল নির্বাচন করা যাতে (খেলোয়াড় B যাই কৌশল নির্বাচন করুক না কেন) তার নিশ্চিত লাভের পরিমাণ সবচেয়ে বেশি এবং খেলোয়াড় B-কে বলা হবে অবম লোকসানকারী খেলোয়াড় যার লক্ষ্য হবে এমন কৌশল নির্বাচন করা (খেলোয়াড় A যে কৌশলই নির্বাচন করুক না কেন) যাতে তার লোকসানের পরিমাণ সবচেয়ে কম রাখা যায়।

এখানে $[a_{ij}]_{m \times n}$ কে খেলোয়াড় A-র প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্স বলে উল্লেখ করা হয় এবং ক্রীড়াটিকে একটি $m \times n$ ক্রীড়া বলা হবে। খেলোয়াড় B-র প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্সটি হবে $[-a_{ij}]_{m \times n}$।

প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্স -এর একটি উদাহরণ দেওয়া যাক :

মনে করুন খেলোয়াড় A-র কৌশলগুলি A_1, A_2, A_3 এবং B-র কৌশলগুলি হল B_1, B_2। কৌশল নির্বাচন অনুসারে দেয় অর্থমূল্যের পরিমাণ নীচে দেওয়া হল :

নির্বাচিত কৌশল	**দেয় অর্থমূল্য**
$A : A_1 ; B : B_1$	A-র কাছ থেকে B 3 টাকা পায়।
$A : A_1 ; B : B_2$	B-র কাছ থেকে A 2 টাকা পায়।
$A : A_2 ; B : B_1$	A-র কাছ থেকে B 4 টাকা পায়।
$A : A_2 ; B : B_2$	B-র কাছ থেকে A 5 টাকা পায়।
$A : A_3 ; B : B_1$	B-র কাছ থেকে A 1 টাকা পায়।
$A : A_3 ; B : B_2$	A-র কাছ থেকে B 8 টাকা পায়।

উপরের তালিকা থেকে দেখা যাচ্ছে যে খেলোয়াড় A-র প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্সটি হল—

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ A & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 5 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} \end{array}$$

এবং খেলোয়াড় B-র প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্স হল—

$$\begin{array}{ccc} & & A \\ & & \begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \end{array} \\ B & \begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -2 & -5 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

❒ বিশুদ্ধ ও মিশ্র কৌশল

আমরা আগেই বলেছি যে, কোনো প্রদত্ত ক্রীড়ার ক্ষেত্রে, ক্রীড়াটির প্রত্যেক সম্পাদনে প্রত্যেক খেলোয়াড় তার প্রদত্ত কৌশলগুলি থেকে কেবলমাত্র একটি কৌশল নির্বাচন করে।

যদি ক্রীড়াটি, প্রত্যেক সম্পাদনে কোনো খেলোয়াড় একটি নির্দিষ্ট ক্রীড়া কৌশল নির্বাচন করে, তাহলে বলা হবে যে ঐ খেলোয়াড় বিশুদ্ধ কৌশল অবলম্বন করেছে এবং নির্দিষ্ট কৌশলটিকে একটি বিশুদ্ধ কৌশল বলা হবে।

যদি কোনো খেলোয়াড় ক্রীড়াটির প্রত্যেক সম্পাদনে একটি নির্দিষ্ট কৌশল গ্রহণ না করে তার প্রদত্ত কৌশলগুলি নির্দিষ্ট সম্ভাবনা (প্রতি কৌশল নির্বাচনের একই সম্ভাবনা নাও হতে পারে) নিয়ে নির্বাচন

করে, তাহলে বলা হবে যে ঐ খেলোয়াড় মিশ্র কৌশল অবলম্বন করেছে। মিশ্র কৌশলের ধারণাটি আরো স্পষ্ট করে বলা যাক।

মনে করুন কোনো ক্রীড়ার ক্ষেত্রে চরম লাভকারী খেলোয়াড় A-র প্রদত্ত কৌশলগুলি হল A_1, A_2, A_3। যদি খেলোয়াড় A মিশ্র কৌশল অবলম্বন করে তাহলে ক্রীড়াটির প্রত্যেক সম্পাদনে A_1, A_2, A_3 কৌশলগুলি থেকে নিরপেক্ষভাবে (at random) কেবলমাত্র একটি কৌশল নির্বাচন করে। যদি A_1, A_2, A_3 কৌশলগুলি নির্বাচন করার সম্ভাবনা যথাক্রমে p_1, p_2, p_3 হয় তাহলে, $p_1 \geq 0,\ \ p_2 \geq 0,\ \ p_3 \geq 0,$ এবং $p_1 + p_2 + p_3 = 1$।

যদি $p_1 = \frac{1}{2},\ \ p_2 = \frac{1}{3},\ \ p_3 = \frac{1}{6}$ হয় তাহলে আমরা বুঝব যে ক্রীড়াটি অনেকবার খেলা হয়েছে।

ধরা যাক 6000 বার ক্রীড়াটি সম্পাদন করলে A_1, A_2, A_3 কৌশল তিনটি যথাক্রমে প্রায় $6000 \times \frac{1}{2} = 3000,\ \ 6000 \times \frac{1}{3} = 2000,\ \ 6000 \times \frac{1}{6} = 1000$ বার নির্বাচন করা হয়।

এক্ষেত্রে খেলোয়াড় A যে মিশ্র কৌশল অনুসরণ করে তাকে $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$ লিখে প্রকাশ করা হয়। যদি বিশেষ ক্ষেত্রে $p_1 = 1, p_2 = 0, p_3 = 0$ হয় সে ক্ষেত্রে ক্রীড়াটির অনেকবার সম্পাদনে, খেলোয়াড় A প্রায় প্রত্যেকবার A_1 নির্বাচন করে এবং A_2, A_3 প্রায় কোনোবারই নির্বাচন করে না সুতরাং, এখানে বলা যায় যে, খেলোয়াড় A বিশুদ্ধ কৌশল A_1 অনুসরণ করে। অনুরূপভাবে, $p_1 = 0, p_2 = 1, p_3 = 0$ অথবা $p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = 1$ হলে বলা যায় খেলোযাড় A যথাক্রমে বিশুদ্ধ কৌশল A_2 অথবা বিশুদ্ধ কৌশল A_3 অনুসরণ করে।

তাহলে বিশুদ্ধ কৌশলকে বিশেষ ধরনের মিশ্র কৌশল বলা যেতে পারে।

মন্তব্য : অনেক সময় খেলোয়াড় A এবং খেলোয়াড় B-র প্রদত্ত কৌশলগুলিকে বিশুদ্ধ কৌশল বলে উল্লেখ করা হয়।

❐ সর্বোত্তম কৌশল এবং ক্রীড়ার মান

এই অনুচ্ছেদে আমরা ধরে নেব যে প্রত্যেক খেলোয়াড় বিশুদ্ধ কৌশল অনুসরণ করে।

ধরা যাক কোনো ক্রীড়ার ক্ষেত্রে A হল চরম লাভকারী খেলোয়াড় এবং B হল অবম লোকসানকারী খেলোয়াড়।

যে কৌশল অবলম্বন করলে খেলোয়াড় A-র নিশ্চিত লাভের পরিমাণ সবচেয়ে বেশি, ধরা যাক $\overline{\vartheta}$ (খেলোয়াড় B যে-কোনো কৌশল অবলম্বন করুক না কেন, খেলোয়াড় A-র লাভের পরিমাণ কখনই ϑ অপেক্ষা কম হবে না), সেই কৌশলকে খেলোয়াড় A -র শ্রেষ্ঠ কৌশল বলা হবে। যে কৌশল অবলম্বন করলে খেলোয়াড় B -র লোকসানের পরিমাণ সবচেয়ে কম রাখা যায়, ধরা যাক $\underline{\vartheta}$ (খেলোয়াড় A-র কোনো কৌশল অবলম্বনের দ্বারা এই লোকসানের পরিমাণ কখনই ϑ এর চেয়ে বেশি হবে না), সেই কৌশলকে খেলোয়াড় B-র শ্রেষ্ঠ কৌশল বলা হবে। এখানে মনে রাখা দরকার যে খেলোয়াড় B অন্য কোনো কৌশল অবলম্বন করলে, খেলোয়াড় A কোনো কৌশল অবলম্বনের দ্বারা B-এর লোকসানের পরিমাণ ϑ এর চেয়ে বেশি করে দিতে পারে।

যদি $\overline{\vartheta} = \underline{\vartheta}$ (= ϑ ধরা যাক) হয়, তাহলে ϑ কে ক্রীড়ার মান বলা হবে এবং এক্ষেত্রে খেলোয়াড় A-র নিশ্চিত লাভের পরিমাণ সবচেয়ে বেশি $\overline{\vartheta}$ হবে এবং অবম লোকসানকারী খেলোয়াড় B-এর লোকসানের পরিমাণ কখনই $\underline{\vartheta}$ এর চেয়ে বেশি হবে না যদি উভয় খেলোয়াড় **সর্বোত্তম কৌশল (Optimal Strategies)** অবলম্বন করে।

একটি উদাহরণের সাহায্যে যোগ্যতম কৌশল এবং ক্রীড়ার মানের ধারণা স্পষ্ট করা যাক :

আমরা নীচের প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্সটি বিবেচনা করব।

			B	
		B_1	B_2	B_3
	A_1	18	5	6
A	A_2	9	8	10
	A_3	– 4	7	3

উপরের ছক থেকে যাচ্ছে যে (1, 1) ঘরের সংশ্লিষ্ট সংখ্যার পরিমাণ (18) সবচেয়ে বেশি। এর থেকে মনে হতেপারে যে চরম লাভকারী খেলোয়াড় A যদি A_1 কৌশল অবলম্বন করে তাহলে তার লাভ সবচেয়ে বেশি (18) হতে পারে। কিন্তু এই লাভের পরিমাণ নিশ্চিত নয় কারণ এক্ষেত্রে খেলোয়াড় $B,$ B_2 বা B_3 কৌশল অবলম্বন করলে A-র লাভের পরিমাণ কমে 5 বা 6 হবে। আবার দেখা যাচ্ছে যে (3, 1) ঘরে প্রদত্ত সংখ্যার পরিমাণ (– 4) সবচেয়ে কম। এর থেকে মনে হতে পারে যে অবম লোকসানকারী খেলোয়াড় B যদি B_1 কৌশল অবলম্বন করে তাহলে তার লোকসানের পরিমাণ সবচেয়ে কম (– 4) হতে পারে। কিন্তু এই লোকসানের পরিমাণ নিশ্চিত নয় কারণ খেলোয়াড় $A,$ কৌশল A_1 বা কৌশল A_2 অবলম্বন করে B-র লোকসানের পরিমাণ বাড়িয়ে 18 বা 9 করতে পারে।

আমরা লক্ষ করছি যে যদি খেলোয়াড় A -কৌশল A_2 অবলম্বন করে তাহলে B যে -কোনো কৌশলই অবলম্বন করুক না কেন, A-র লাভ কমপক্ষে 8 একক হবেই অর্থাৎ A-র এই পরিমাণ লাভ (8 একক) নিশ্চিত। আরও দেখা যাচ্ছে যে, A যদি অন্য কৌশল A_1 বা A_3 অবলম্বন করে তাহলে এই নিশ্চিত লাভের পরিমাণ কমে 5 বা –4 হবে। সুতরাং খেলোয়াড় A যদি A_2 কৌশল অবলম্বন করে তাহলে তার নিশ্চিত লাভের পরিমাণ সবচেয়ে বেশি (8 একক) হবে।

আবার দেখা যাচ্ছে যে, যদি খেলোয়াড় B, কৌশল B_2 অবলম্বন করে তাহলে তার লোকসানের পরিমাণ কখনই 8 এককের বেশি হবে না এবং খেলোয়াড় B যদি অন্য কৌশল B_1 বা B_3 অবলম্বন করে তাহলে তার লোকসানের পরিমাণ 8 একক থেকে বেড়ে 18 একক বা 10 একক হতে পারে। সুতরাং যদি খেলোয়াড় B, কৌশল B_2 অবলম্বন করে তাহলে সে তার লোসসানের পরিমাণ 8 একক রাখতে পারবে এবং অন্য কোনো কৌশল অনুসরণ করে এর থেকে কম লোকসান নিশ্চিত করা যাবে না।

সুতরাং, এই ক্রীড়ার ক্ষেত্রে খেলোয়াড় A ও খেলোয়াড় B -এর যোগ্যতম কৌশলগুলি হল যথাক্রমে A_2 ও B_2 এবং ক্রীড়ার মান হবে 8 একক।

মন্তব্য : কোনো ক্রীড়া সমাধান করতে বললে বুঝতে হবে যে খেলোয়াড় A ও খেলোয়াড় B -এর যোগ্যতম কৌশল এবং ক্রীড়ার মান (যদি অস্তিত্ব স্বীকৃত হয়) নির্ণয় করতে হবে। পরবর্তী অনুচ্ছেদে আমরা দেখব বিশুদ্ধ কৌশল অবলম্বন করে কীভাবে যোগ্যতম কৌশল ও ক্রীড়ার মান নির্ণয় করা যায় এবং আরও দেখব যে, কেবলমাত্র বিশুদ্ধ কৌশল অবলম্বন করে যে-কোনো ক্রীড়া সমস্যার সমাধান করা সম্ভব নয়।

❒ মিনিম্যাক্স (ম্যাক্সিমিন) নীতি ও অশ্বোপবেশন বিন্দু

পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদের আলোচনা থেকে বোঝা গেল যে বিশুদ্ধ কৌশলের সাহায্যে ক্রীড়া সমস্যার সমাধান করার অর্থ হল — প্রত্যেক খেলোয়াড়ের এমন কৌশল নির্বাচন করা যাতে প্রতিপক্ষ খেলোয়াড়ের কাছ থেকে তার নিশ্চিত পাওনার পরিমাণ সবচেয়ে বেশি হয় এবং যেখানে প্রতিপক্ষের কোনো কৌশল নির্বাচনের দ্বারা এই পাওনার পরিমাণ কমবে না।

কৌশল নির্বাচনের এই নীতিটিকে মিনিম্যাক্স (ম্যাক্সিমিন) নীতি বলা হয়।

এখন এই নীতিটি পরিস্কার ভাবে নীচে বিবৃত করা হল:

যদি কোনো খেলোয়াড় তার প্রদত্ত কৌশলগুলির ক্ষেত্রে প্রত্যেক কৌশলের জন্য তার অনুকূলে সবচেয়ে খারাপ ফল নিয়ে একটি তালিকা তৈরি করে তাহলে এই তালিকার ফলগুলির মধ্যে যেটি তার পক্ষে সবচেয়ে ভাল, সেই ফলটির অনুরূপ কৌশলটিকে ওই খেলোয়াড় যোগ্যতম কৌশল হিসেবে নির্বাচন করবে।

একটি উদাহরণ দিয়ে নীতিটি স্পষ্ট করা যাক :

মনে করুন কোনো ক্রীড়ার প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্সটি হল—

$$
\begin{array}{cc|c|c|c|}
 & & \multicolumn{3}{c}{B} \\
 & & \text{I} & \text{II} & \text{III} \\
\cline{3-5}
 & \text{I} & -3 & -2 & 6 \\
\cline{3-5}
A & \text{II} & 2 & 0 & 2 \\
\cline{3-5}
 & \text{III} & 5 & -2 & -4 \\
\cline{3-5}
\end{array}
$$

এখানে চরম লাভকারী খেলোয়াড় *A*-র ক্ষেত্রে I, II, III কৌশলগুলির জন্য সবচেয়ে খারাপ ফলগুলির সারি হল যথাক্রমে –3, 0, –4।

এখন চরম { –3, 0, –4} = 0

সুতরাং, 'চরম-অবম' (maxi-min) নীতি অনুযায়ী *A*-এর II কৌশলটি নির্বাচন করা উচিত।

আবার, অবম লোকসানকারী খেলোয়াড় *B*-র ক্ষেত্রে I, II, III কৌশলগুলির জন্য সবচেয়ে খারাপ ফলগুলির স্তম্ভ হল যথাক্রমে 5, 0, 6।

এখন অবম {5, 0, 6} = 0।

সুতরাং 'অবম-চরম' (mini-max) নীতি অনুযায়ী, খেলোয়াড় *B*-র III কৌশল নির্বাচন করা উচিত। তাহলে ক্রীড়ার মানের ধারণা (যা পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদে দেওয়া হয়েছে) থেকে আমরা বলতে পারি যে এক্ষেত্রে ক্রীড়ার মান হবে 0 এবং বিশুদ্ধ সর্বোত্তম কৌশল (pure strategy) হবে (II, II) যেখানে প্রথম বন্ধনীর মধ্যে প্রথমটি *A*-র এবং দ্বিতীয়টি *B*-র উত্তম কৌশল নির্দেশ করে।

এখন 'সারিগুলির অবম মানগুলিকে যথাক্রমে' বর্গাকার ঘর দ্বারা এবং স্তম্ভগুলির চরম মানগুলিকে যথাক্রমে বৃত্তকার ঘর দ্বারা বন্ধ করলে আমরা নিচের ছকটি পাই:

$$\begin{array}{cc|c|c|c|l}
 & & \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{সারির অবম মান} \\
\hline
 & \text{I} & \boxed{-3} & -2 & \textcircled{6} & -3 \\
\hline
A & \text{II} & 2 & \textcircled{\boxed{0}} & 2 & 0 \\
\hline
 & \text{III} & \textcircled{5} & -2 & \boxed{-4} & -4 \\
\hline
 & \text{স্তম্ভের চরম মান} & 5 & 0 & 6 &
\end{array}$$

এই ক্রীড়ার ক্ষেত্রে—

চরম (সারির অবম মান) (স্তম্ভের চরম মান) = 0 = ক্রীড়ার মান।

প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্সের যে ঘরের জন্য চরম (সারি সমূহের অবম মান) = অবম (স্তম্ভের চরম মান) হয়, সেইটিকে ক্রীড়ার অশ্বোপবেশন বিন্দু বা স্যাডল বিন্দু হবে।

তাহলে দেখা যাচ্ছে যে, কোনো ক্রীড়ার স্যাডল বা অশ্বোপবেশন বিন্দুর অস্তিত্ব থাকলে, এই বিন্দুতে প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্সটির পদের মানটিই হবে ক্রীড়ার মান।

আরেকটি উদাহরণ দেওয়া যাক :

ধরুন প্রাপ্তি ম্যাটিক্সটি হল

$$\begin{array}{cc|c|c|c|l}
 & & & B & & \\
 & & B_1 & B_2 & B_3 & \text{সারির অবম মান} \\
\hline
 & A_1 & -2 & 15 & -2 & -2 \\
\hline
A & A_2 & -5 & -6 & -4 & -6 \\
\hline
 & A_3 & -5 & 20 & -8 & -8 \\
\hline
 & \text{স্তম্ভের চরম মান} & -2 & 20 & -2 &
\end{array}$$

এখানে দেখা যাচ্ছে যে

চরম (সারির অবম মান) = অবম (স্তম্ভের চরম মান) = –2

সুতরাং এখানে ক্রীড়ার মান = –2

আরও লক্ষ করা যাচ্ছে যে এখানে প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্সটির (1, 1) এবং (1, 3) উভয় ঘরের পদটি –2,

সুতরাং এখানে উত্তম কৌশলগুলি হল (A_1, B_1), (A_1, B_3) এবং ক্রীড়ার মান –2।

উপপাদ্য : কোনো ক্রীড়া সমস্যার প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্সটি $[a_{ij}]$... হলে,

$$\boxed{\underset{i}{\text{চরম}}\left(\underset{j}{\text{অবম}}\, a_{ij}\right) \le \underset{j}{\text{অবম}}\left(\underset{i}{\text{চরম}}\, a_{ij}\right)}$$

		B	
		B_1	B_2
A	A_1	4	6
	A_2	2	x

সমাধান : x -এর মান উপেক্ষা করে সারির অবম মান এবং স্তম্ভের চরম মান নির্ণয় করার জন্য আমরা নীচের ছকটি পাই—

		B		
		B_1	B_2	সারির অবম মান
A	A_1	4	6	4
	A_2	2	x	2
স্তম্ভের চরম মান		4	6	

এখানে চরম (সারির অবম মান) = চরম {4, 2} = 4 এবং অবম (স্তম্ভের চরম মান) = অবম {4, 6} = 4.

তাহলে আমরা বলতে পারি যে x-এর মান যাই হোক, এখানে $\underline{\vartheta} = 4$, $\overline{\vartheta} = 4$.

সুতরাং ক্রীড়াটি যথার্থ নির্ধারণযোগ্য এবং ক্রীড়াটির মান 4।

উদাহরণ 2 :

a -র যে সকল মানের জন্য নীচের প্রাপ্তি ম্যাট্রিকবিশিষ্ট ক্রীড়াটি যথার্থ নির্ধারণযোগ্য হবে তা দেখান।

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & B & \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ A \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \left[\begin{array}{ccc} a & 6 & 2 \\ -1 & a & -7 \\ -2 & 4 & a \end{array}\right] \end{array}$$

সমাধান : a -এর মান উপেক্ষা করে সারির অবম মান এবং স্তম্ভের চরম মান নির্ণয় করার জন্য আমরা নিচের ছকটি পাই।

			B		
		B_1	B_2	B_3	সারির অবম মান
	A_1	a	6	2	2
A	A_2	–1	a	–7	–7
	A_3	– 2	4	a	– 2
স্তম্ভের চরম মান		–1	6	2	

এখানে চরম $\{2, -7, -2\} = 2$

এবং অবম $\{-1, 6, 2\} = -1$

অর্থাৎ এখানে a-র মান উপেক্ষা করলে $\underline{\vartheta} = 2$ এবং $\overline{\vartheta} = -1$।

কিন্তু যে- কোনো ক্রীড়ার ক্ষেত্রে $\underline{\vartheta} \le \overline{\vartheta}$ হয়। তাহলে যদি $-1 < a \le 2$ হয় প্রদত্ত ক্রীড়ার ক্ষেত্রে আমরা পাই $\underline{\vartheta} =$ চরম $\{a, -7, -2\} = a$ এবং $\overline{\vartheta} =$ অবম $\{a, 6, 2\} = a$.

সুতরাং যদি $-1 \le a \le 2$ হয়, ক্রীড়াটি যথার্থ নির্ধারণযোগ্য হবে এবং ক্রীড়ার মান $= \underline{\vartheta} = \overline{\vartheta} = a$ ।

আমরা লক্ষ করছি যে যদি $a < -1$ বা $a > 2$ হয় তাহলে ক্রীড়াটি যথার্থ নির্ধারণযোগ্য হবে না। যেমন, যদি $a = 3$ হয়, আমরা পাই

$\underline{\vartheta} =$ চরম (সারির অবম মান) = চরম $\{2, -7, -2\} = 2$

এবং $\overline{\vartheta} =$ অবম (স্তম্ভের চরম মান) = অবম $\{3, 6, 3\} = 3$।

সুতরাং $a = 3$ হলে $\underline{\vartheta} \neq \overline{\vartheta}$।

উদাহরণ 3 :

দেখান যে নীচের ক্রীড়াটির দুটি অশ্বোপবেশন বা স্যাডল বিন্দু আছে। ক্রীড়ার মান এবং যোগ্যতম কৌশল নির্ণয় করুন।

$$
\begin{array}{cc|c|c|c|}
 & & & B & \\
 & & B_1 & B_2 & B_3 \\
\hline
 & A_1 & 1 & 2 & 1 \\
\hline
A & A_2 & 0 & -4 & -1 \\
\hline
 & A_3 & 1 & 3 & -2 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc|c|c|c|c}
 & & & B & & \\
 & & B_1 & B_2 & B_3 & \text{সারির অবম মান} \\
\cline{3-5}
 & A_1 & \enclose{circle}{\boxed{1}} & 2 & \enclose{circle}{\boxed{1}} & 1 \\
\cline{3-5}
A & A_2 & 0 & \boxed{-4} & -1 & -4 \\
\cline{3-5}
 & A_3 & \enclose{circle}{1} & \enclose{circle}{3} & \boxed{-2} & -2 \\
\cline{3-5}
\text{স্তম্ভের চরম মান} & & 1 & 3 & 1 &
\end{array}
$$

উপরের ছক থেকে দেখা যাচ্ছে যে,

(1, 1) এবং (1, 3) এই দুটি ঘরে প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্সটির অশ্বোপবেশন বিন্দু আছে।

এখানে চরম (সারির অবম মান) = চরম $\{1, -4, -2\} = 1$

এবং অবম (স্তম্ভের চরম মান) = অবম $\{1,3,1\}=1$

সুতরাং ক্রীড়ার মান $\vartheta=1$ এবং সর্বোত্তম কৌশলগুলি (A_1, B_1) এবং (A_1, B_3)।

❐ 2 × 2 ক্রমের প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্সবিশিষ্ট ক্রীড়া সমস্যার সমাধান [বীজগাণিতিক পদ্ধতি]

ধরা যাক প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্সটি হল

$$\begin{array}{cc|c|c|} & & \multicolumn{2}{c}{B} \\ & & B_1 & B_2 \\ \cline{3-4} & A_1 & a & b \\ \cline{3-4} A & & & \\ & A_2 & c & d \\ \cline{3-4} \end{array}$$

যদি ম্যাট্রিক্সটির অশ্বোপবেশন বিন্দু থাকে তাহলে আমরা 7.4 অনুচ্ছেদে দেখেছি যে বিশুদ্ধ কৌশল অবলম্বন করে ক্রীড়া সমস্যাটি সমাধান করা যায় অর্থাৎ ক্রীড়ার মান ও যোগ্যতম কৌশল নির্ণয় করা যায়।

এখন ধরুন প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্সটির অশ্বোপবেশন বা স্যাডল বিন্দু নেই। এক্ষেত্রে আমরা দেখব কীভাবে মিশ্র কৌশল অবলম্বন করে ক্রীড়াটির মান এবং যোগ্যতম কৌশল নির্ণয় করা যায়।

খেলোয়াড় A-র বিশুদ্ধ কৌশল অবলম্বন করার অর্থ হল যে ক্রীড়াটির যে-কোনো সম্পাদনে A_1, A_2 কৌশলগুলির মধ্যে একটি কৌশল নিরপেক্ষভাবে নির্বাচন করা এবং মিশ্র কৌশল নির্ণয় করার অর্থ হল যে A_1, A_2 কৌশলগুলির নির্বাচনের সম্ভাবনা ধরা যাক x_1, x_2 $(0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1)$ -এর মান নির্ণয় করা। এখন যেহেতু A_1, A_2 কখনই একই সঙ্গে নির্বাচন করা হয় না এবং একটি কৌশল অবশ্যই নির্বাচন করা হবে, আমরা পাই $x_1 + x_2 = 1$.

তাহলে A_1, A_2 কৌশলগুলি নির্বাচনের সম্ভাবনা যথাক্রমে ধরা যায় x, $1 - x$ যেখানে $0 \le x \le 1$.

অনুরূপভাবে, খেলোয়াড় B-র মিশ্র কৌশল নির্ণয় করার অর্থ হল B_1, B_2 কৌশলগুলি নির্বাচনের সম্ভাবনা, ধরা যাক y, $1-y$ $(0 \le y \le 1)$ -এর মান নির্ণয় করা।

প্রথমে চরম লাভকারী খেলোয়াড় A-র দিক থেকে সমস্যাটি বিবেচনা করা যাক।

যদি খেলোয়াড় B, B_1 কৌশল অবলম্বন করে তাহলে A-র প্রত্যাশিত লাভ হবে $ax + c(1-x) = g_1$

(মনে করুন) এবং যদি খেলোয়াড় *B*, B_2 কৌশল অবলম্বন করে তাহলে *A*-র প্রত্যাশিত লাভ হবে $bx + d(1 - x) = g_2$ (মনে করুন)।

এখন ধরুন, অবম $\{g_1, g_2\} = g'$ ।

তাহলে দেখা যাচ্ছে যে অবম লোকসানকারী খেলোয়াড় *B* যে কৌশলই অনুসরণ করুক না কেন, *A*-র নিশ্চিত প্রত্যাশিত লাভের পরিমাণ হবে g' যখন A_1 কৌশলটি *x* সম্ভাবনা নিয়ে *A* নির্বাচন করে। এখন *A*-র উদ্দেশ্য হল *x*-র মান নির্ণয় করা যাতে g' -এর মান সবচেয়ে বেশি হয়।

এখানে $g_1 \geq g', \ \ g_2 \geq g'$ .... (1)

এবার অবম লোকসানকারী খেলোয়াড় *B*-এর দিক থেকে সমস্যাটি বিবেচনা করা যাক।

যদি খেলোয়াড় *A*, A_1 কৌশল অবলম্বন করে তাহলে *B*-র প্রত্যাশিত লোকসান হবে $ay + b(1 - y) = l_1$ (মনে করুন)। যদি খেলোয়াড় *A*, A_2 কৌশল অবলম্বন করে তাহলে *B*-র প্রত্যাশিত লোকসান হবে $cy + d(1 - y) = l_2$ (মনে করুন)। এখন মনে করুন, চরম $\{l_1, l_2\} = l'$ ।

তাহলে দেখা যাচ্ছে যে চরম লাভকারী খেলোয়াড় *A* যে কৌশলই নির্বাচন করুন না কেন, *B*-র প্রত্যাশিত লোকসানের পরিমাণ কখনই l' এর বেশি হবে না যখন B_1 কৌশলটি *y* সম্ভাবনা নিয়ে *B* নির্বাচন করে। এখন *B*-এর উদ্দেশ্য হল *y*-এর মান নির্ণয় করা যাতে l' -এর মান সবচেয়ে কম হয়।

এখানে $l_1 \leq l', \ \ l_2 \leq l'$ .... (2)

এখন (1) ও (2) থেকে আমরা পাই $ax + c(1 - x) \geq g', \ \ bx + d(1 - x) \geq g'$ এবং $ay + b(1 - y) \leq l', \ \ cy + d(1 - y) \leq l'$

আমরা লক্ষ করছি যে, যদি $x, y\,(0 \leq x \leq 1, \ \ 0 \leq y \leq 1)$ -এর মান নির্ণয় করা যায় যাতে $l_1 = l_2 = l'$ এবং $g_1 = g_2 = g'$ হয় তাহলে এরূপ মানের জন্য $(g')_{\text{চরম}} = (l')_{\text{অবম}} = \vartheta$ (মনে করুন) হবে এবং এক্ষেত্রে ক্রীড়ার মান [8.2 অনুচ্ছেদে ব্যাপক অর্থে ক্রীড়ার মানের সংজ্ঞা দেওয়া হয়েছে] ϑ হবে এবং *x*, *y* -এর মান থেকে উভয় খেলোয়াড়ের যোগ্যতম কৌশল নির্ণয় করা যাবে।

এখন, প্রদত্ত ক্রীড়াটির অশ্বোপবেশন বিন্দু না থাকায় *a*, *b*, *c*, *d* -এর মান এরূপ হবে যাতে যে-কোনো ক্ষেত্রে $g_1 = g_2, \ l_1 = l_2$ সমীকরণ দুটি *x*, *y* -এর জন্য $(0 \leq x \leq 1, \ \ 0 \leq y \leq 1)$ সমাধান করা যাবে এবং সমাধান করে *x*, *y* -এর যে মান পাওয়া যাবে সেই মানগুলির জন্য $g_1 = g_2 = l_1 = l_2 = \upsilon$ হবে যেখানে υ হল ক্রীড়ার মান।

এক্ষেত্রে আমরা পাই

$$x = \frac{d-c}{a+d-b-c}, \quad y = \frac{d-b}{a+b-b-c}$$

এবং $\upsilon = \dfrac{ad-bc}{a+b-b-c}$

সুতরাং, মিশ্র কৌশল ব্যবহার করে প্রদত্ত 2 × 2 ক্রীড়াটি (যার অশ্বোপবেশন বিন্দু নাই) সমাধান করা যাবে।

ক্রীড়াটির সমাধানের এই পদ্ধতিকে বীজগাণিতিক পদ্ধতি বলা হয়।

মন্তব্য : যদি 2 × 2 ক্রমের প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্সের অশ্বোপবেশন বিন্দু বা স্যাডল বিন্দু থাকে তাহলে বীজগাণিতিক পদ্ধতিতে ক্রীড়াটির সমাধান সম্ভব হতেও পারে, আবার নাও পারে। আমরা দুটি উদাহরণ দিয়ে বিষয়টি স্পষ্ট করব।

উদাহরণ 1 : ধরুন প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্সটি হল

$$\begin{array}{cc|cc|c}
 & & \multicolumn{2}{c}{B} & \text{সারির অবম মান} \\
 & & B_1 & B_2 & \\
\hline
 & A_1 & 0 & 6 & 0 \\
A & & & & \\
 & A_2 & 2 & 2 & 2 \\
\hline
\text{স্তম্ভের চরম মান} & & 2 & 6 &
\end{array}$$

এখানে (2, 1) ঘরে অশ্বোপবেশন বিন্দু আছে এবং এই ঘরে পদের মান 2 এবং যোগ্যতম কৌশল হল (A_2, B_1)।

এখন এই ক্রীড়াটি বীজগাণিতিক পদ্ধতিতে সমাধান কর চেষ্টা করলে আমরা পাই

$$0,(x)+2(1-x) = 6x+2(1-x) \qquad \text{.....} \ (1)$$

$$0,(y)+6(1-y) = 2y+2(1-y) \qquad \text{.....} \ (2)$$

যেখানে $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ এবং x ও y যথাক্রমে A-র A_1 কৌশল নির্বাচনের সম্ভাবনা এবং B-র B_1 কৌশল নির্বাচনের সম্ভাবনা।

(1) থেকে আমরা পাই $6x = 0$, বা $x = 0$

এবং (2) থেকে পাই $y = \frac{2}{3}$

এখানে $x = 0,\ y = \frac{2}{3}$ সমাধান গ্রহণ করা যাবে কারণ $0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1$ সিদ্ধ হয়। আমরা লক্ষ করছি এই পদ্ধতিতেও ক্রীড়ার মান $= 6.0 + 2(1-0) = 2$ ।

এখন $x = 0$ থেকে বলা যায় A-র সর্বোত্তম কৌশল হল বিশুদ্ধ কৌশল A_2।

আবার $y = \frac{2}{3}$ থেকে বলা যায় B-র সর্বোত্তম কৌশল হল মিশ্র কৌশল $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$।

এই উদাহরণ থেকে বোঝা গেল যে, কোনো প্রদত্ত ক্রীড়ার ক্ষেত্রে ক্রীড়ার মান সর্বদা একই হবে কিন্তু যোগ্যতম কৌশল কোনো খেলোয়াড়ের বিশুদ্ধ কৌশল ও অন্য খেলোয়াড়ের মিশ্র কৌশল যোগ্যতম হতে পারে।

উদাহরণ 2 : ধরুন প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্সটি হল

$$\begin{array}{cc|c|c|c}
 & & \multicolumn{2}{c}{B} & \\
 & & B_1 & B_2 & \text{সারির অবম মান} \\
\cline{3-4}
 & A_1 & \textcircled{8} & \textcircled{\boxed{6}} & 6 \\
\cline{3-4}
A & A_2 & \boxed{2} & \boxed{2} & 2 \\
\cline{3-4}
\multicolumn{2}{c}{\text{স্তম্ভের চরম মান}} & 8 & 6 &
\end{array}$$

এখানে (1, 2) বিন্দুতে অশ্বোপবেশন বিন্দু বা স্যাডল বিন্দু আছে। মিনিম্যাক্স (ম্যাক্সিমিন) নীতি অনুসারে ক্রীড়ার মান = চরম (সারির অবম মান) = অবম (স্তম্ভের চরম মান) = 6 এবং সর্বোত্তম কৌশল হল বিশুদ্ধ কৌশল (A_1, B_2)।

এখন এই ক্রীড়াটি বীজগাণিতিক পদ্ধতিতে সমাধান করার চেষ্টা করলে আমরা পাই

$$8 \cdot x + 2(1-x) = 6 \cdot x + 2(1-x) \qquad \text{.... (1)}$$

$$8 \cdot y + 6(1-y) = 6 \cdot y + 2(1+y) \qquad \text{.... (2)}$$

যেখানে $0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1$.

(1) থেকে আমরা পাই $x = 0$ এবং

(2) থেকে পাই $2y + 6 = 2$ ।

এখন $2y + 6 = 2$ থেকে আমরা পাই

$y = -2$ যা সম্ভব নয় কারণ $0 \le y \le 1$ ।

সুতরাং 7.6 অনুচ্ছেদে বিবৃত বীজগাণিতিক পদ্ধতিতে ক্রীড়াটি সমাধান করা গেল না।

[এক্ষেত্রে $ax + c(1-x) = \vartheta$, $bx + d(1-x) = \vartheta$, $ay + b(1-y) = \vartheta$, $cy + d(1-y) = \vartheta$ সমীকরণগুলির এক বা একাধিক $(g' = l' = \vartheta)$ সমীকরণকে যথার্থ অসমীকরণ (> বা <) ধরে পরীক্ষা ও ভুল সংশোধন পদ্ধতির সাহায্যে সমাধান করা যায়— এখানে আমরা পদ্ধতিটি আলোচনা করব না।]

উদাহরণ 2 :

নিচের 2 × 2 ক্রীড়াটির সমাধান করুন :

		B	
		B_1	B_2
A	A_1	5	1
	A_2	3	4

সমাধান : এখানে চরম (সারির অবম মান)

= চরম {1, 3} = 3

এবং অবম (স্তম্ভের চরম মান)

= অবম {5, 4} = 5

সুতরাং চরম (সারির অবম মান) $\neq$ অবম (স্তম্ভের চরম মান)

তাহলে ক্রীড়াটির কোন অশ্বোপবেশন বা স্যাডল বিন্দু নাই।

সুতরাং বীজগাণিতিক পদ্ধতিতে মিশ্র কৌশল অবলম্বন করে ক্রীড়াটি সমাধান করা যাবে।

মনে করুন, খেলোয়াড় A যথাক্রমে x, $1-x$ সম্ভাবনা নিয়ে A_1, A_2 নির্বাচন করে এবং খেলোয়াড় B যথাক্রমে y, $1-y$ সম্ভাবনা নিয়ে B_1, B_2 নির্বাচন করে,

যেখানে $0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1.$

এখন খেলোয়াড় A-র উদ্দেশ্য হল x-এর এমন মান ঠিক করা যাতে অবম $\{g_1, g_2\} = g'$ (ধরুন) এর মান সবচেয়ে বেশি হয়, যেখানে $g_1 = 5x + 3\,(1-x)$ হলে A-র প্রত্যাশিত লাভ যখন B, B_1 কৌশল গ্রহণ করে এবং $g_2 = 1 \cdot x + 4(1-x)$ হল A-র প্রত্যাশিত লাভ যখন B, B_2 কৌশল গ্রহণ করে। তাহলে আমরা পাই

$$g_1 = 5x + 3(1-x) \ge g'$$
$$g_2 = x + 4(1-x) \ge g'$$

অনুরূপে, খেলোয়াড় B-র উদ্দেশ্য থেকে আমরা পাই

$$l_1 = 5y + 1(1-y) \ge l'$$

$l_2 = 3y + 4(1-y) \ge l'$, যেখানে y-এর মান এমনভাবে ঠিক করতে হবে যাতে l' = চরম $\{l_1, l_2\}$ এর মান সবচেয়ে কম হয়।

এখন $g_1 = g_2 = g'$, $l_1 = l_2 = l'$ থেকে আমরা পাই

$$5x + 3(1-x) = x + 4(1-x),$$

$$5y + 1(1-y) = 3y + 4(1-y)$$

বা, $5x = 1$, $5y = 3$

সুতরাং $x = \frac{1}{5},\ \ y = \frac{3}{5}$ যেখানে

$$0 < \frac{1}{5} < 1,\ \ 0 < \frac{3}{5} < 1$$

তাহলে $x = \frac{1}{5}$, $y = \frac{3}{5}$ মানের জন্য g'-এর মান সবচেয়ে বেশি হবে এবং l'-এর মান সবচেয়ে কম হবে এবং (g') চরম $= (l')$ অবম $= \frac{17}{5}$.

সুতরাং ক্রীড়ার মান $\frac{17}{5}$ এবং সর্বোত্তম কৌশলগুলি হল $A:\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$; $B:\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$

3.4 প্রাধান্য তত্ত্ব ব্যবহার করে ক্রীড়া সমস্যার সমাধান

ক্রীড়া সমস্যায়, ধরা যাক, খেলোয়াড় A দুটি কৌশল A_1, A_2 অবলম্বন করতে পারে। এখন, কৌশল A_1 নির্বাচন করলে প্রতিপক্ষ B যে কৌশলই অবলম্বন করুক না কেন, A এর লাভ, A_2 নির্বাচনের লাভ থেকে বেশি বা সমান হবে, যদি B -এর কৌশল অপরিবর্তিত থাকে। এক্ষেত্রে বলা হয় *'A'* কৌশলটি A_2-এর চেয়ে বেশি গুরুত্বপূর্ণ। প্রদত্ত প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্স (মনে করুন *M)* থেকে কৌশল A_2 সারি (বা স্তম্ভ) বাদ দেওয়া যায়।

এইভাবে সারি (বা স্তম্ভ) বাদ দিলে যদি নতুন প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্সটি M_1 হয় তাহলে M_1 -এর যোগ্যতম কৌশলগুলি মধ্যে থেকে প্রারম্ভিক ম্যাট্রিক্স M -এর যোগ্যতম কৌশলগুলি পাওয়া যাবে যেখানে বাদ দেওয়া কৌশলটির সম্ভাবনা শূন্য ধরতে হবে।

নীচে বিবৃত উপপাদ্যগুলি (প্রমাণ দেওয়া হল না) থেকে প্রাধান্য তত্ত্বের বিষয়গুলি স্পষ্টভাবে বোঝা যাবে।

উপপাদ্য 1 ঃ যদি কোনো $m \times n$ ক্রীড়ার প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্সের i তম সারির প্রত্যেক পদ r তম সারির অনুরূপ পদের চেয়ে কম বা সমান হয় তা হলে i তম সারি বাদ দিলে চরম লাভকারী খেলোয়াড়ের সর্বোত্তম কৌশলগুলির কোনো পরিবর্তন হবে না।

[এক্ষেত্রে r তম সারির ক্রীড়া কৌশল i তম সারির ক্রীড়া কৌশলের চেয়ে বেশী গুরুত্বপূর্ণ।]

উপপাদ্য 2 ঃ যদি $m \times n$ ক্রীড়ার মূল্যসূচক ম্যাট্রিক্সের j তম স্তম্ভের অনুরূপ পদের চেয়ে বেশি বা সমান হয় তাহলে j তম স্তম্ভ বাদ দিলে অবম লোকসানকারী খেলোয়াড়ের সর্বোত্তম কৌশলগুলির কোনো পরিবর্তন হবে না।

[এখানে k-তম স্তম্ভের ক্রীড়া কৌশল j-তম স্তম্ভের ক্রীড়া কৌশলের চেয়ে বেশি গুরুত্বপূর্ণ।]

উপাপাদ্য 3 ঃ যদি $m \times n$ ক্রীড়ার প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্সের i-তম সারির প্রত্যেক পদ অন্য সারিগুলির (দুটি বা তার বেশি) উত্তল সমবায়ের অনুরূপ পদের চেয়ে $\leq$ (অন্তত একটি পদের জন্য $<$) হয়, তাহলে প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্স থেকে i-তম সারি বাদ দিলে চরম লাভকারী খেলোয়াড়ের সর্বোত্তম কৌশলগুলির কোনো পরিবর্তন হবে না।

যদি j-তম স্তম্ভের প্রত্যেক পদ অন্য স্তম্ভগুলির (দুটি বা তার বেশি) উত্তল সমবায়ের অনুরূপ পদের চেয়ে $\geq$ (অন্তত একটি পদের চেয়ে $>$) হয়, তাহলে প্রাপ্তি ম্যাট্রিক থেকে j-তম স্তম্ভ বাদ দিলে অবম লোকসানকারী খেলোয়াড়ের উত্তম কৌশলগুলির কোনো পরিবর্তন হবে না।

মন্তব্য ঃ প্রাধান্য তত্ত্বের সাহায্যে অনেক ক্ষেত্রে কোনো ক্রীড়ার প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্সকে 2×2 ক্রমের ম্যাট্রিক্সে রূপান্তর করা যায় এবং এর পর 2×2 ক্রীড়াটি সহজে সমাধান করে প্রদত্ত ক্রীড়াটির মান পাওয়া যায়।

উপাপাদ্য 1 ঃ প্রাধান্য তত্ত্বের সাহায্যে নীচের 3×3 ক্রীড়াটি সমাধান করুন।

$$
\begin{array}{c|c|c|c|}
 & & B & \\
 & B_1 & B_2 & B_3 \\
\hline
A_1 & -4 & 6 & 3 \\
\hline
A : \ A_2 & -3 & -3 & 6 \\
\hline
A_3 & 2 & -3 & 4 \\
\hline
\end{array}
$$

সমাধান : এখানে A চরম লাভকারী খেলোয়াড় এবং B অবম লোকসানকারী খেলোয়াড়। আমরা লক্ষ করছি B_3 স্তম্ভের প্রত্যেক পদ B_1 স্তম্ভের অনুরূপ পদের চেয়ে বেশি কারণ তিনটি পদের ক্ষেত্রে [B_3 স্তম্ভের 3, 6, 4, B_1 স্তম্ভের $-4, -3, 2$] আমরা পাই $3 > -4, 6 > -3, 4 > 2$.

সুতরাং প্রাধান্য তত্ত্ব অনুযায়ী প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্স থেকে B_3 স্তম্ভটি বাদ দেওয়া যায়।

এখন সংকুচিত ম্যাট্রিক্সটি হল

$$\begin{array}{cc|c|c|} & & \multicolumn{2}{c}{B} \\ & & B_1 & B_2 \\ \cline{3-4} & A_1 & -4 & 6 \\ \cline{3-4} A: & A_2 & -3 & -3 \\ \cline{3-4} & A_3 & 2 & -3 \\ \cline{3-4} \end{array}$$

আবার দেখা যাচ্ছে যে সংকুচিত ম্যাট্রিক্সটির তৃতীয় সারির প্রত্যেক পদ দ্বিতীয় সারির অনুরূপ পদের চেয়ে বেশী বা সমান [এখানে $2 > -3, -3 = -3$]। সুতরাং প্রাধান্য তত্ত্ব অনুযায়ী A_2 সারিটি বাদ দেওয়া যায়।

তাহলে সংকুচিত ম্যাট্রিক্সটি হল

$$\begin{array}{cc|c|c|} & & \multicolumn{2}{c}{B} \\ & & B_1 & B_2 \\ \cline{3-4} A: & A_1 & -4 & 6 \\ \cline{3-4} & A_3 & 2 & -3 \\ \cline{3-4} \end{array}$$

যা একটি 2 × 2 ক্রমের ম্যাট্রিক্স।

এখন এই ম্যাট্রিক্সটির ক্ষেত্রে

চরম (সারির অবমমান) = চরম $\{-4, -3\} = -3$ এবং অবম (স্তম্ভের চরম মান) = অবম $\{2, 6\} = 2$, যেখানে $-3 \neq 2$

সুতরাং ম্যাট্রিক্সটির কোনো অশ্বোপবেশন বা স্যাডল বিন্দু নাই।

এখন মিশ্র কৌশল অবলম্বন করলে, সর্বোত্তম কৌশলের জন্য আমরা পাই

$$-4x+2(1-x)=6x+(-3)(1-x) \qquad .....(1)$$

$$-4y+6(1-y)=2y+(-3)(1-y) \qquad ..... (2)$$

এখানে চরম লাভকারী খেলোয়াড় A_1, A_3 কৌশলগুলি যথাক্রমে $x, 1-x(0 \le x \le 1)$ সম্ভাবনা নিয়ে নির্বাচন করে এবং অবম লোকসানকারী খেলোয়াড় B_1, B_2 কৌশলগুলি যথাক্রমে y, $1-y(0 \le y \le 1)$ সম্ভাবনা নিয়ে নির্বচন করে।

এখন (1) ও (2) সমাধান করে আমরা পাই $x=\frac{1}{3},\ y=\frac{3}{5}$

সুতরাং, A_1, A_3 র সম্ভাবনা যথাক্রমে $\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}$

এবং B_1, B_2-র সম্ভাবনা যথাক্রমে $\frac{3}{5},\frac{2}{5}$ ।

এখানে মূল ক্রীড়ার ক্ষেত্রে A_2-র সম্ভাবনা 0 এবং B_3 -এর সম্ভাবনা 0।

এখন ক্রীড়ার মান হল [(1) বা (2) -এর বামপক্ষে $x=\frac{1}{3}$, ধরে] = 0

সুতরাং ক্রীড়ার মান 0 এবং সর্বোত্তম কৌশলগুলি হল $A:\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right),\ B:\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)$

উপাপাদ্য 2 : প্রাধান্য তত্ত্বের সাহায্যে নীচের 4 × 5 ক্রীড়াটি সমাধান করুন :

B :

		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	10	5	5	20	4
A :	A_2	11	15	10	17	25
	A_3	7	12	8	9	8
	A_4	5	13	9	10	5

সমাধান : এখানে A চরম লাভকারী খেলোয়াড়। A_2 ও A_3 এর সারির ক্ষেত্রে আমরা লক্ষ করছি $11 > 7$, $15 > 12$, $10 > 8$, $17 > 9$, $25 > 8$। সুতরাং A_2 সারির প্রত্যেক পদ A_3 সারির অনুরূপ পদের চেয়ে বেশি। সুতরাং প্রাধান্য তত্ত্ব অনুযায়ী A_3 সারি বাদ দেওয়া যায়। (এখানে A_2 কৌশলটি A_3 কৌশলের তুলনায় প্রাধান্য পায়।)

সংকুচিত ম্যাট্রিক্সটি হল :

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|}
 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \\ \hline
A_1 & 10 & 5 & 5 & 20 & 4 \\ \hline
A_2 & 11 & 15 & 10 & 17 & 25 \\ \hline
A_4 & 5 & 13 & 9 & 10 & 5 \\ \hline
\end{array}$$

আবার আমরা লক্ষ করছি A_2 সারির প্রত্যেক পদ A_4 সারির অনুরূপ পদের চেয়ে বেশি। সুতরাং প্রাধান্য তত্ত্ব অনুযায়ী A_4 সারি বাদ দেওয়া যায়।

সংকুচিত ম্যাট্রিক্সটি হল :

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|}
 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \\ \hline
A_1 & 10 & 5 & 5 & 20 & 4 \\ \hline
A_2 & 11 & 15 & 10 & 17 & 25 \\ \hline
\end{array}$$

এখন দেখা যাচ্ছে B_4 স্তম্ভের প্রত্যেক পদ B_1 স্তম্ভের অনুরূপ পদের চেয়ে বেশি [$20 > 10$, $17 > 11$]। সুতরাং এখানে B_1 কৌশলটি B_4 -এর তুলনায় প্রাধান্য পায়। অতএব প্রাধান্য তত্ত্ব অনুযায়ী B_4 স্তম্ভ বাদ দেওয়া যায়।

এখন সংকুচিত ম্যাট্রিক্সটি হল :

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & B_1 & B_2 & B_3 & B_5 \\ \hline
A_1 & 10 & 5 & 5 & 4 \\ \hline
A_2 & 11 & 15 & 10 & 25 \\ \hline
\end{array}$$

এই ম্যাট্রিক্সটির ক্ষেত্রে B_3 কৌশলটি B_1 -এর তুলনায় প্রাধান্য পায় কারণ $10 > 5$, $11 > 10$. সুতরাং B_1 এর স্তম্ভ বাদ দেওয়া যায়। সংকুচিত ম্যাট্রিক্সটি হল :

$$\begin{array}{c|c|c|c|} & B_2 & B_3 & B_5 \\ \hline A_1 & 5 & 5 & 4 \\ \hline A_2 & 15 & 10 & 25 \\ \hline \end{array}$$

এখানে A_2 কৌশল A_1 -এর তুলনায় প্রাধান্য পায়। সুতরাং A_1 সারি বাদ দেওয়া যায়। রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্সটি হয়

$$\begin{array}{c|c|c|c|} & B_2 & B_3 & B_5 \\ \hline A_2 & 15 & 10 & 25 \\ \hline \end{array}$$

এখানে $15 > 10$। সুতরাং B_3 কৌশলটি B_2 এর তুলনায় প্রাধান্য পায়। B_2 স্তম্ভ বাদ দিলে রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্সটি হয়

$$\begin{array}{c|c|c|} & B_3 & B_5 \\ \hline A_2 & 10 & 25 \\ \hline \end{array}$$

এখানে $25 > 10$।

সুতরাং B_5 স্তম্ভ বাদ দেওয়া যায়। তাহলে সংকুচিত ম্যাট্রিক্সটি হয়

$$\begin{array}{c|c|} & B_3 \\ \hline A_2 & 10 \\ \hline \end{array}$$ যা 1 × 1 ক্রমের ম্যাট্রিক্স।

এই ম্যাট্রিক্স থেকে আমরা বলতে পারি যে এখানে সর্বোত্তম কৌশল হল বিশুদ্ধ (A_2, B_3) [কারণ অন্যান্য কৌশলগুলির $(A_1, A_3, A_4, B_1, B_2, B_4, B_5)$ প্রত্যেকের সম্ভাবনা 0] এবং ক্রীড়ার মান 10।

উপাপাদ্য 3 : প্রাধান্য তত্ত্বের ব্যবহার করে নীচের ক্রীড়া সমস্যাটি সমাধান করুন :

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	–1	2	1
A_2	2	2	0	1
A_3	3	–2	1	–2
A_4	3	1	–3	2

সমাধান : এখানে A চরম লাভকারী খেলোয়াড় এবং B অবম লোকসানকারী খেলোয়াড়। আমরা দেখছি যে B_1 স্তম্ভের প্রত্যেক পদ B_2 স্তম্ভের অনুরূপ পদের চেয়ে বেশি বা সমান এবং তিনটি পদের ক্ষেত্রে [B_1 স্তরের 1, 3, 3, B_2 স্তম্ভের –1m –2, 1] আমরা পাই $1 > -1$, $3 > -2$, $3 > 1$

সুতরাং প্রাধান্য তত্ত্ব অনুযায়ী, প্রদত্ত প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্স থেকে B_1 স্তম্ভটি বাদ দেওয়া যায়। এখন সংকুচিত ম্যাট্রিক্সটি হল—

	B_2	B_3	B_4
A_1	–1	2	1
A_2	2	0	1
A_3	–2	1	–2
A_4	1	–3	2

আবার দেখা যাচ্ছে যে, A_3 সারির পদগুলি A_1 সারির অনুরূপ পদগুলির তুলনায় ছোট।

সুতরাং প্রাধান্য তত্ত্ব অনুযায়ী A_3 সারিটি বাদ দেওয়া যায় এবং সংকুচিত ম্যাট্রিক্সটি হল—

$$\begin{array}{c|c|c|c|} & B_2 & B_3 & B_4 \\ \hline A_1 & -1 & 2 & 1 \\ \hline A_2 & 2 & 0 & 1 \\ \hline A_4 & 1 & -3 & 2 \\ \hline \end{array}$$

এখন $\frac{1}{2}(B_2+B_3)$ -এর পদগুলি হল $\frac{1}{2},\ 1,\ -1$ এবং B_4 স্তম্ভের অনুরূপ পদগুলি হল 1, 1, 2 যেখানে $1>\frac{1}{2},\ 1=1,\ 2>-1$।

তাহলে প্রাধান্য তত্ত্বের নিয়ম অনুযায়ী B_4 স্তম্ভ বাদ দেওয়া যায় এবং সংকুচিত মাট্রিক্সটি হল—

$$\begin{array}{c|c|c|} & B_2 & B_3 \\ \hline A_1 & -1 & 2 \\ \hline A_2 & 2 & 0 \\ \hline A_4 & 1 & -3 \\ \hline \end{array}$$

আবার, A_2 এবং A_4 সারির অনুরূপ মানগুলি তুলনা করলে দেখা যাচ্ছে যে, 2 > 1 এবং 0 < –3. সুতরাং প্রাধান্য তত্ত্ব অনুযায়ী A_4 সারি বাদ দেওয়া যায়। তাহলে সংকুচিত ম্যাট্রিক্সটি হল—

$$\begin{array}{c|c|c|} & B_2 & B_3 \\ \hline A_1 & -1 & 2 \\ \hline A_2 & 2 & 0 \\ \hline \end{array}$$

যা একটি 2 × 2 ক্রমের ম্যাটিক্স।

$$\begin{array}{c|c|c|}
 & B_2 & B_3 \\ \hline
A_1 & -1 & 2 \\ \hline
A_2 & 2 & 0 \\ \hline
\end{array}$$

ম্যাট্রিক্সটির ক্ষেত্রে

চরম (সারির অবম মান) = চরম $\{-1, 0\} = 0$

এবং অবম (স্তম্ভের চরম মান) = অবম $\{2.2\} = 2$

যেখানে $0 \neq 2$

সুতরাং ম্যাট্রিক্সটির কোনো অশ্বোপবেশন বিন্দু নেই।

এখন মিশ্র কৌশল অবলম্বন করলে, সর্বোত্তম কৌশলের জন্য আমরা পাই—

$$-1 \cdot x + 2(1-x) = 2x + 0)(1-x) \qquad \text{... (1)}$$

$$-1y + 2(1-y) = 2y + 0(1-y) \qquad \text{... (2)}$$

যেখানে চরম লাভকারী খেলোয়াড় A_1, A_2 কৌশলগুলি যথাক্রমে $x, 1-x\ (0 \leq x \leq)$ সম্ভাবনা নিয়ে নির্বাচন করে এবং অবম লোকসানকারী খেলোয়াড় B_2, B_3 কৌশলগুলি যথাক্রমে $y, 1-y\,(0 \leq y \leq 1)$ সম্ভাবনা নিয়ে নির্বাচন করে।

এখন (1) ও (2) সমাধান করে আমরা পাই $x = \frac{2}{5},\ y = \frac{2}{5}$ ।

সুতরাং A_1, A_2 -র সম্ভাবনা $\frac{2}{5},\ \frac{3}{5}$ । এবং B_1, B_3 এর সম্ভাবনা $\frac{2}{5},\ \frac{3}{5}$ ।

ক্রীড়ার মান হল $-1 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$ ।

সুতরাং প্রদত্ত ক্রীড়াটির কৌশলগুলি হল :

$$A : \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0, 0\right);\ \ B : \left(0, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$$

এবং ক্রীড়ার মান $\frac{4}{5}$ ।

3.5 সংক্ষিপ্তসার

প্রথমে দুই ব্যক্তির শূন্য যোগফলবিশিষ্ট ক্রীড়ার প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্সের ধারণা দেওয়া হয়েছে এবং পরে প্রমাণ করা হয়েছে যে কেবলমাত্র বিশুদ্ধ কৌশল অবলম্বন করে এরূপ ক্রীড়ার মান নির্ণয় করা যাবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি ক্রীড়ার অশ্বোপবেশন বা স্যাডল বিন্দু পাওয়া যায়। এরপর আমরা দেখছি কীভাবে মিশ্র কৌশল অবলম্বন করে 2 × 2 ক্রীড়ার (যার অশ্বোপবেশন বিন্দু নাই) বীজগাণিতিক পদ্ধতিতে সমাধান করা যায় এবং সবশেষে প্রাধান্য তত্ত্বের আলোচনা করা হয়েছে।

3.6 অনুশীলনী

1. দুজন খেলোয়াড় A ও B -এর মধ্যে মুদ্রা নিক্ষেপের একটি খেলায় প্রত্যেক খেলোয়াড় একই সঙ্গে একটি মুদ্রা নিক্ষেপ করে। যদি দুজন খেলোয়াড় প্রত্যেক Head নিক্ষেপ করে তাহলে খেলোয়াড় A কে B 5 টাকা দেয় এবং যদি প্রত্যেক খেলোয়াড় 'Tail' নিক্ষেপ করে তাহলে A -কে B 6 টাকা দেয়; অন্যথায় B -কে A 2 টাকা দেয়। এই ক্রীড়ার ক্ষেত্রে খেলোয়াড় A -র প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্সটি লিখুন এবং দেখান যে এই ম্যাট্রিক্সটির কোন অশ্বোপবেশন বিন্দু নাই।

2. নীচের প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্সবিশিষ্ট ক্রীড়ার মান এবং সর্বোত্তম কৌশলগুলি নির্ণয় করুন :

$$
\begin{array}{cc|c|c|c|c|c|}
 & & & & B & & \\
 & & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \\
\hline
 & A_1 & 11 & 4 & 3 & 10 & 2 \\
\hline
A: & A_2 & 8 & 7 & 6 & 8 & 9 \\
\hline
 & A_3 & 4 & 6 & 6 & 5 & 10 \\
\hline
 & A_4 & 7 & 8 & 4 & 4 & 3 \\
\hline
\end{array}
$$

3. দেখান যে নীচের ক্রীড়াটির কোন অশ্বোপবেশন বিন্দু নাই।

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	1	2	–1
$A :\ A_2$	1	3	1	3
A_3	3	2	3	–1
A_4	–1	3	–1	7

4. ম্যাট্রিক্স (অবম-চরম) নীতি প্রয়োগ করে নীচের ক্রীড়াগুলি সমাধান করুন :

(i)
$$
\begin{array}{cc}
 & B \\
 & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\
\begin{array}{r} A_1 \\ A : A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

(ii)
$$
\begin{array}{cc}
 & B \\
 & \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\
A : \begin{array}{r} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 5 \\ -2 & -1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

(iii)
$$
\begin{array}{cc}
 & B \\
 & \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\
\begin{array}{r} A_1 \\ A_2 \\ A : A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{array} & \begin{bmatrix} 4 & -2 & -4 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -2 \\ -1 & -3 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

5. যদি নীচের প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্সের (2, 2) ঘরে অশ্বোপবেশন বিন্দু থাকে তাহলে x ও y -এর সকল মান নির্ণয় করুন। আরও প্রমাণ করুন যে x, y -এর কোনো মানের জন্য (2, 3) বিন্দুতে ক্রীড়াটির অশ্বোপবেশন বিন্দু থাকতে পারে না।

$$\begin{array}{r|ccc|} & & B & \\ & B_1 & B_2 & B_3 \\ \hline A_1 & 5 & x & 9 \\ A : A_2 & y & 8 & 13 \\ A_3 & 9 & 6 & 7 \\ \hline \end{array}$$

6. x -এর মান নির্ণয় করুন যাতে নীচের প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্সটির অশ্বোপবেশন বিন্দু পাওয়া যায়।

$$\begin{array}{r|ccc|} & & B & \\ & B_1 & B_2 & B_3 \\ \hline A_1 & x & 6 & 2 \\ A : A_2 & -1 & x & -7 \\ A_3 & -2 & 4 & x \\ \hline \end{array}$$

7. যদি নীচের ক্রীড়াটির মান 2 হয় তাহলে দেখান যে $a \geq 5$ এবং $b \leq 5$

$$\begin{array}{r|c|c|c|} & & B & \\ & B_1 & B_2 & B_3 \\ \hline A_1 & 0 & 2 & 3 \\ \hline A : A_2 & 8 & 5 & b \\ \hline A_3 & 2 & a & 4 \\ \hline \end{array}$$

8. বীজগাণিতিক পদ্ধতিতে নীচের ক্রীড়াগুলি সমাধান করুন :

(i) $$\begin{array}{r|cc|} & & B \\ & B_1 & B_2 \\ \hline A : A_1 & 6 & -3 \\ A_2 & -3 & 0 \\ \hline \end{array}$$

(ii) $$\begin{array}{r|cc|} & & B \\ & B_1 & B_2 \\ \hline A : A_1 & 0 & 2 \\ A_2 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

(iii)
$$A : \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} B \\ \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \end{array}$$

9. প্রাধান্য তত্ত্বের সাহায্যে নীচের ক্রীড়াগুলি সমাধান করুন :

(i)
$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} B \\ \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -5 & 3 & 1 & 15 \\ 5 & 5 & 4 & 6 \\ -4 & -2 & 0 & -5 \end{bmatrix} \end{array}$$

(ii)
$$A : \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} B \\ \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

(iii)
$$A : \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} B \\ \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10 & 5 & 5 & 20 & 4 \\ 11 & 15 & 10 & 17 & 25 \\ 7 & 12 & 8 & 9 & 8 \\ 5 & 13 & 9 & 10 & 15 \end{bmatrix} \end{array}$$

10. নীচের প্রত্যেকটি ক্রীড়াকে 2 × 2 ক্রমের প্রাপ্তিবিশিষ্ট ক্রীড়ায় রূপান্তর করুন :

(i)
$$A \begin{array}{c} B \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{bmatrix} -5 & 3 & 1 & 15 \\ 5 & 5 & 4 & 5 \\ -4 & -2 & 0 & -5 \end{bmatrix} \end{array}$$

(iii)

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & -2 & -3 \\ 4 & 3 & 4 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 5 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

(iv)

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{bmatrix} 7 & 7 & 6 & 3 & 2 \\ 9 & 8 & 9 & 3 & 5 \\ 10 & 6 & 7 & 10 & 11 \end{bmatrix} \end{array}$$

11. 10 (iii) -এ প্রদত্ত ক্রীড়াটির সমাধান করুন।

12. প্রমাণ করুন যে 2 × 2 ক্রীড়ায় অশ্বোপবেশন বিন্দু থাকবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্সে সারি বা স্তম্ভের প্রাধান্য থাকে।

13. কোনো ক্রীড়ায় খেলোয়াড় A এবং B প্রত্যেকের কাছে একটি 1 টাকার মুদ্রা, একটি 2 টাকার মুদ্রা এবং একটি 5 টাকার মুদ্রা আছে। প্রত্যেক খেলোয়াড় অপর খেলোয়াড়ের অজ্ঞাতে একটি মুদ্রা বেছে নেয়। খেলার শর্ত অনুসারে খেলোয়াড় A খেলোয়াড় B -এর মুদ্রাটি লাভ করে যদি মুদ্রা দুটির মানের যোগফল জোড় সংখ্যা হয়। এই ক্রীড়াটির প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্সটি (A-র) লিখুন এবং প্রাধান্য তত্ত্বের সাহয্যে ক্রীড়াটি সমাধান করুন।

14. কোনো 3 × 3 ক্রীড়ার প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্সটি হল —

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{bmatrix} d & c & c \\ a & f & e \\ b & d & c \end{bmatrix} \end{array}$$

যেখানে $0 < a < b < c < d < e < f$।

প্রাধান্য তত্ত্বের সাহায্যে এই ক্রীড়াটিকে 2 × 2 ক্রীড়ায় রূপান্তর করুন।

প্রমাণ করুন ক্রীড়ার মান $D = 0$

এর থেকে দেখান $c < \gamma < d$ ।

15. a -এর যে মানের জন্য নীচের প্রাপ্তি ম্যাট্রিক্সটি যথার্থ সিদ্ধান্তকারী হবে তা নির্ণয় করুন।

$$\begin{array}{r|c|c|c|}
 & \multicolumn{3}{c}{B} \\
 & B_1 & B_2 & B_3 \\ \cline{2-4}
A_1 & a & 7 & 3 \\ \cline{2-4}
A : A_2 & -2 & a & -8 \\ \cline{2-4}
A_3 & -3 & 4 & a \\ \cline{2-4}
\end{array}$$

3.7 গ্রন্থপঞ্জি

- S. D. Sharma, Operational Research, Kedar Nath Publishers.
- S. C. Malik & S. Arora, Mathematical Analysis, New Age International (P) Ltd.

একক 4 ❑ পার্থক্যযুক্ত সমীকরণ

গঠন

4.1 উদ্দেশ্য

দুটি চলরাশিযুক্ত সুসংজ্ঞাত অপেক্ষকের ক্ষেত্রে স্বাধীন চলের বিভিন্ন মানের সাথে অধীনস্থ চলেরও বিভিন্ন মান পাই কিন্ত তাদের মধ্যে সঠিক সম্পর্ক নির্ধারণ করা অনেক সময় সম্ভব হয় না। এই অসুবিধা দূর করার জন্য দুই প্রকার চলের পার্থক্যকে কাজে লাগিয়ে এক অভিনব পদ্ধতিতে গাণিতিক অনেক সমস্যাকে সমাধান করা হয়। এই পদ্ধতিই ‘সসীম পার্থক্য প্রণালী বা ‘finite difference method’ নামে প্রচলিত। গাণিতিক এই ধারণাকে কাজে লাগিয়ে আজ বিজ্ঞান, কারিগরি শিক্ষা, সমাজবিজ্ঞানের বিবিধ ধারায় এবং অর্থনীতির বহু সমস্যাকে সমাধান করা হচ্ছে। ‘সসীম পার্থক্য-প্রণালীর হাত ধরে জন্ম নিয়েছে পার্থক্যগত সমীকরণ (Difference equation)। সংখ্যা সমৃদ্ধ গাণিতিক বিশ্লেষণে আজ এই দুটি ধারার অগ্রগতি পরিলক্ষিত হয়। পর পর দুটি অংশে এই সম্বন্ধে আমরা এখন আলোকপাত করবো।

4.2 প্রস্তাবনা

$[a, b]$ বন্ধ অবকাশে (interval), ধরি $y = f(x)$ একটি সুসংজ্ঞাত অপেক্ষক। $x_0, x_1, x_2, \ldots., x_n$ (স্বাধীন চলের বিভিন্ন মান) এককথায়, $x_i \, (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ সমব্যবধানে অবস্থিত যখন অধীনস্থ চলের

অনুরূপ মান গুলি হ'ল যথাক্রমে $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ (অর্থাৎ y_i ($i = 0, 1, 2, ..., n$)) যারা বদ্ধ অবকাশ অর্থাৎ [a, b] তে সীমাবদ্ধ। এই বদ্ধ অবকাশে প্রাপ্ত, $x_0, x_1, x_2, ...x_n$ এর মানগুলিকে আমরা ব'লব 'nodes' বা 'arguments' এবং $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ -এর মানগুলিকে চিহ্নিত ক'রব 'entries' হিসাবে। স্পষ্টতই, সমব্যবধান বজায় রাখতে $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = ... = x_n - x_{n-1}$ -কে $h(\neq 0)$ ধ'রে নেওয়া যায়। [a, b] বদ্ধ অবকাশের মধ্যস্থ x_i ($i = 0, 1, 2, ..., n$), ($n + 1$) সংখ্যক মানগুলির গণনার কাজে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা নিয়ে থাকে। ফলে, $y_1 - y_0, y_2 - y_1, y_3 - y_2, ..., y_n - y_{n-1}$ এর ভূমিকাও হয় খুবই তাৎপর্যপূর্ণ। এর থেকে 'first forward difference' (প্রথম অগ্রবর্তী পার্থক্য) এর ধারণা জন্ম নেয়। প্রতীকী প্রকাশ হ'ল $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \left(i = 0, 1, 2, ..., n-1\right)$

অর্থাৎ $\Delta f\left(x_0 + ih\right) = f\left(x_0 + \left(i+1\right)h\right) - f\left(x_0 + ih\right)$

যখন $i = 0, 1, 2, ..., (n - 1)$

4.3 সসীম প্রভেদ/পার্থক্য

'Δ' কে আমরা first forward difference operator' হিসাবে গণ্য করি। যার সংজ্ঞায় আসে $\Delta f\left(x\right) = f\left(x+h\right) - f\left(x\right)$, ('Δ' কে বলা হয় প্রথম ক্রমের (1st order) অগ্রবর্তী প্রভেদ অপারেটর (forward difference operator)

ফলে, সহজভাবে লেখা যায় যে

$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$ । এটিকে দ্বিতীয় ক্রমের (2nd order forward difference) অগ্রবর্তী পার্থক্য বলা হয়।

যেখানে $\Delta^2 = \Delta\ (\Delta)$, $(\Delta)^2$ নয় অর্থাৎ Δ opereator টি দুবার, পর পর প্রয়োগ করা হয়েছে।

বি.দ্র. অনুরূপে,

(1) $\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i$

....

$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$

[যখন $i = 0, 1, 2, ..., n - 1$. এদের তৃতীয় ক্রমে, ..., k তম এবং $k\left(1 \le k \le n\right)$ একটি ক্রমের অগ্রবর্তী পার্থক্য হিসাবে ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা (positive integer) ধরা হয়।

(2) n -তম ক্রমে অগ্রবর্তী পার্থক্যকে অনেক ক্ষেত্রে,

$$\Delta^n y_0 = y_n - \binom{n}{1} y_{n-1} + \binom{n}{2} y_{n-2} - .... + (-1)^n y_0$$

হিসাবে প্রকাশ করা হয়, [যখন $\binom{n}{r} = nc_r$]

Forward difference table (অগ্রবর্তী পার্থক্যের সারণি) (দ্বিতীয় ক্রম পর্যন্ত)

x	***y***	**Δ**	**Δ²**
x_0	y_0		
		Δy_0	
			$\Delta^2 y_0$
x_1	y_1		
		Δy_1	
			$\Delta^2 y_1$
x_2	y_2		
		Δy_2	
x_3	y_3		

এস্থলে,

$y_1 - y_0$, $y_2 - y_1, ..., y_n - y_{n-1}$ -কে পশ্চাদ্‌বর্তী পার্থক্য (backward difference) হিসাবে অভিহিত করা হয় যাদের প্রতীকী প্রকাশ হয় যথাক্রমে $\therefore \nabla y_i = y_i - y_{i-1} (i = 1, 2, ..., n)$

∇ কে ‘backward difference operator’ (1st order) বা ‘পশ্চাদ্‌বর্তী প্রভেদ অপারেটর’ (প্রথম ক্রমের) রূপে চিহ্নিত করা হয়।

অর্থাৎ $\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$

অনুরূপে, দ্বিতীয় ক্রমের ‘পশ্চাৎবর্তী প্রভেদ অপারেটর’ হ’ল $\nabla^2 = \nabla(\nabla)$ (2nd order ‘backward differenec operator’)

$\therefore \nabla^2 y_i = \nabla y_i - \nabla y_{i-1}$

এইভাবে এগিয়ে গেলে আমরা লিখতে পারি,

$$\nabla^n y_n = y_n - \binom{n}{1} y_{n-1} + \binom{n}{2} y_{n-2} - .... + (-1)^n y_0.$$

বিষয়টিকে সারণির মাধ্যমে লিখলে :

x	y	∇	∇^2
x_0	y_0		
x_1	y_1	∇y_1	$\nabla^2 y_1$
x_2	y_2	∇y_2	$\nabla^2 y_2$
x_3	y_3	∇y_3	$\nabla^2 y_3$

উদা. (1) পার্থক্য-তালিকা (দ্বিতীয় ক্রমের) জন্য রচনা কর যখন $y = f(x) = x^2$ যখন $x = 1,3,5,7$ [অগ্রবর্তী প্রভেদ অপারেটরের (forward differenc operator) সাহায্যে]

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
1	1		
		8	
3	9		8
		16	
5	25		8
		24	
7	49		

উদা. 2 $y = f(x)$ -এর নিচের তালিকাটি গ্রহণযোগ্য :

x	4	5	6	7
y	31	73	124	159

‘পশ্চাৎবর্তী প্রভেদ’ অনুসারে তালিকা প্রস্তুত করে Δf^2 (7) নির্ণয় কর।

সমাধান : পশ্চাৎবর্তী প্রভেদ তালিকা :

x	y	∇y	$\nabla^2 y$
4	31		
		42	
5	73		9
		51	
6	124		–16
		35	
7	159		

এক্ষেত্রে, লক্ষণীয় যে, $\Delta^2 f(7) = -16$ **(উত্তর)**

(B) Shift Operator (স্থান পরিবর্তনকারী/স্থানত্যাগী চালক)

যদি $\mathrm{E}\left(f(x)\right)=f(x+h)$ হয়

[যেখানে h হ'ল সমদূরত্বের দৈর্ঘ্য যাতে x চলের মান পরিবর্তিত হয়]

তখন 'E' কে স্থানত্যাগী চালক বা shift operator বলা হয়।

$$\therefore \mathrm{E}^2\left(f(x)\right)=\mathrm{E}\left(\mathrm{E}\left(f(x)\right)\right)$$

[এস্থলে $\mathrm{E}f^2\neq(\mathrm{E})^2 f, \mathrm{E}^2 f=\mathrm{E}\left(\mathrm{E}(f)\right)$ বুঝায়]

$$=\mathrm{E}\left(f(x+h)\right)=f(x+2h)$$

সাধারণ ভাবে, $\mathrm{E}^n\left(f(x)\right)=f(x+nh)$

'Inverse Shift Operator' (বিপরীতমুখী স্থান পরিবর্তনকারী চালক)

যাকে E^{-1} হিসাবে চিহ্নিত করা হয়। সংজ্ঞানুযায়ী, $\mathrm{E}^{-1}\left(f(x)\right)=f(x-h)$

'Δ' (অগ্রবর্তী পার্থক্য চালক) এবং 'E' (স্থান পরিবর্তনকারী চালকের মধ্যে সম্পর্ক :)

আমরা জানি যে,

$$\begin{aligned}\Delta\left(f(x)\right)&=f(x+h)-f(x)\\&=\mathrm{E}\left(f(x)\right)-f(x)\\&=(\mathrm{E}-1)\left(f(x)\right)\end{aligned}$$

$\therefore \Delta\equiv \mathrm{E}-1$ (উভয়পক্ষের তুলনা ক'রে)

বা, $\mathrm{E}=\Delta+1$

অনুরূপে, $\Delta^2\left(f(x)\right)=\Delta\left(f(x+h)\right)-\delta\left(f(x)\right)$

$$=f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)$$

$$\left[\therefore \Delta\left(f(x)\right)=f(x+h)-f(x)\right]$$

$$= \mathrm{E}^2\left(f(x)\right) - 2\mathrm{E}\left(f(x)\right) + f(x)$$

$$= \left(\mathrm{E}^2 - 2\mathrm{E} + 1\right)\left(f(x)\right)$$

$$= (\mathrm{E} - 1)^2\left(f(x)\right)$$

$\Delta^2 \equiv (\mathrm{E} - 1)^2$ (উভয় দিক তুলনা ক'রে)

বি.দ্র. সাধারণ রূপ হ'ল $\Delta^n \equiv (\mathrm{E} - 1)^n$, $n = 1, 2, ...$

একই পদ্ধতি অণুসরণ করে ∇ [পশ্চাৎ-মুখী পার্থক্য চালক (backward difference operator) এর সংজ্ঞানুসারে]

$$\nabla\left(f(x)\right) = f(x) - f(x-h)$$

$$= f(x) - \mathrm{E}^{-1}\left(f(x)\right)$$

$$= \left(1 - \mathrm{E}^{-1}\right)\left(f(x)\right)$$

$\therefore \nabla \equiv 1 - \mathrm{E}^{-1}$ (উভয় পক্ষে তুলনা করে)

সাধারণভাবে বলা যায় যে $\nabla^n \equiv \left(1 - \mathrm{E}^{-1}\right)^n$

বি.দ্র. Newton-Gregory formula (নিউটন-গ্রেগরি সূত্র)

$$f(x+nh) = \mathrm{E}^n\left(f(x)\right)$$

$$= (1+\Delta)^n\left(f(x)\right) \quad \left(\therefore \mathrm{E}^n \equiv (1+\Delta)^4\right)$$

$$= f(x) + \binom{n}{1}\Delta\left(f(x)\right) + \binom{n}{2}\Delta^2\left(f(x)\right) + ... + \binom{n}{n}\Delta^n\left(f(x)\right)$$

[যখন $\binom{n}{r} = nc_r$]

সংক্ষেপে, $f(x+nh)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\,\Delta^{i}(f(x)).$

এক্ষেত্রে, উল্লেখ করা যায় যে

x চলের মান সমব্যবধানে (h) স্থাপিত হলে, 'নিউটন-গ্রেগরি সূত্র' সংখ্যা সূচক বিশ্লেষণ শাখায় বহুলাংশে ব্যবহৃত হয়।

'E' এর কতকগুলি গুরুত্বপূর্ণ ধর্মাবলি ঃ

(i) $\mathrm{E}(f(x))=\mathrm{E}(f_1(x))+\mathrm{E}(f_2(x))+....$ [যেখানে $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+....$]

স্পষ্টতই 'E' বিচ্ছেদ ধর্ম মেনে চলে।

(distributive property)

(ii) যদি $f(x)=k\phi((x))=\mathrm{KE}(\phi(x))$

$\therefore \mathrm{EK}\equiv\mathrm{KE},\mathrm{E}$ (স্থান পরিবর্তনশীল চালকটি ধ্রুবক পদের পরিপ্রেক্ষিতে বিনিময় (commutative) ধর্ম মেনে চলে।

(iii) $\mathrm{E}^{m}\mathrm{E}^{n}(f(x))=\mathrm{E}^{m+n}(f(x))$

E, সূচক তত্ত্ব মেনে চলে।

(iv) সহজেই দেখানো যায় যে $\mathrm{E}(\Delta f(x))=\Delta(\mathrm{E}f(x))$

অর্থাৎ $\mathrm{E}(\Delta)\equiv\Delta(\mathrm{E})$

Δ [forward difference operator (অগ্রবর্তী পার্থক্য চালক)]

অথবা E [Shift Operator (স্থান পরিবর্তনকারী চালক)]

সঙ্গে 'D' এর সম্পর্ক ঃ

ধরি, $f(x)$ একটি সন্তত এবং সন্তত ভাবেই অবকল যোগ্য (সকল ক্রমের জন্য) নির্দিষ্ট বন্ধ অবকাশ $[a, b]$ তে x চলের সমব্যবধানে (h এর জন্য) সুসংজ্ঞাত। তবে টেলর উপপাদ্য অনুসারে।

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{21}f''(x)+... \quad \left[\frac{d}{dx}(f(x)) \text{ বা } \mathrm{D}(f(x))=f'(x)\right]$$

$$\therefore \mathrm{E}(f(x))=f\left(1+h\mathrm{D}+\frac{h^2}{2!}\mathrm{D}^2+....\right)(f(x))$$

$$=e^{hD}\left(f\left(x\right)\right)$$

সুতরাং $E\equiv e^{hD}$ বা, $1+\Delta\equiv e^{hD}$

বি.দ্র. E^{-1} [অর্থাৎ $1-\nabla$] $\equiv e^{-1hD}$

(D) 'কেন্দ্রীয় পার্থক্য-চালক' (Central Difference Operator)

এই শ্রেণির চালক (operator) কে δ দ্বারা সূচিত করে নিম্নোক্তভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয় :

$$\delta\left(f\left(x\right)\right)=f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f\left(x-\frac{h}{2}\right)$$

অর্থাৎ $\delta\left(f\left(x\right)\right)=E^{1/2}\left(f\left(x\right)\right)-E^{-1/2}\left(f\left(x\right)\right)$

$$=\left(E^{\frac{1}{2}}-E^{-1/2}\right)\left(f\left(x\right)\right)$$

উভয় পক্ষে তুলনা করে পাই,

$$\delta\equiv E^{1/2}-E^{-1/2}$$

(E) 'গড় চালক' (Average Operator)

গড় চালক কে μ দিয়ে সূচিত করে নিম্নোক্তভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয় :

$$\mu f\left(x\right)=\frac{1}{2}\left[f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]$$

বা, $\mu\left(f\left(x\right)'\right)=\frac{1}{2}\left[E^{1/2}\left(f\left(x\right)\right)+E^{-1/2}\left(f\left(x\right)\right)\right]$

$$=\frac{1}{2}\left(E^{1/2}+E^{-1/2}\right)\left(f\left(x\right)\right)$$

$$\therefore \mu\equiv\frac{1}{2}\left(E^{1/2}+E^{-1/2}\right)$$

বি.দ্র. ['δ' এবং 'μ' চালক দুটি $E^{1/2}$ এবং $E^{-1/2}$ চালক দুটির পরিবর্তিত রূপ। সেই কারণে এদের প্রয়োগস্থল সীমিত।]

4.4 চালকসমূহের 'উদাহরণমালা'

উদা. 1 প্রমাণ করুন ঃ

$$\Delta - \nabla = \delta^2$$

সমাধান : আমরা জানি যে,

$$\delta = E^{1/2} - E^{-1/2}$$

বা, $\delta^2 = \left(E^{1/2} - E^{-1/2}\right)^2$

$$= \left(E^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 2E^{\frac{1}{2}}E^{-1/2} + \left(E^{-1/2}\right)^2$$

$$= E - 2 + E^{-1}$$

$$= (1+\Delta) - 2 + (1-\nabla)$$

$$= 1 + \Delta - 2 + 1 - \nabla$$

$$= \Delta - \nabla + 2 - 2 = \Delta - \nabla$$

$\therefore \Delta - \nabla = \delta^2$ (প্রমাণিত)

উদা. 2 প্রমাণ করুন :

μ (গড় চালক), D (অবকলযোগ্য চালক) হলে, $\mu\delta = \sin h\ (hD)$

সমাধান : এস্থলে,

$$\mu\delta \equiv \frac{1}{2}\left(E^{1/2} + E^{-1/2}\right)\left(E^{1/2} - E^{-1/2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(E^{1/2}\right)^2 - \left(E^{-1/2}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(E - E^{-1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{hD}-e^{-hD}\right)$$

$$=\frac{e^{hD}-e^{-hD}}{2}=\sin h(hD)\quad\left[\because \sin h(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right]$$

উদা. 3 দেখান যে,

$\nabla\, E(f(x))=E\nabla(f(x))$, [E ও ∇ প্রচলিত প্রতীকে প্রকাশিত]

সমাধান : x চলের উপর রচিত সমব্যবধান = h এবং $f(x)$ যেকোনো বহুপদ রাশির জন্য

$$=\nabla(E(f(x)))=\nabla(f(x+h))=f(x+h)-f(x)$$

পুনরায়, $E\nabla(f(x))=E(\nabla(f(x)))=E(f(x)-f(x-h))$

$$=f(x+h)-f(\overline{x-h}+h)=f(x+h)-f(x)$$

সুতরাং, $\nabla E(f(x))=E\nabla(f(x))$. এটাই নির্ণেয় ফল।

উদা. 4 দেখান যে

$$\Delta\log_e f(x)=\log_e\left\{1+\frac{\Delta f(x)}{f(x)}\right\}$$

সমাধান : $\Delta\log_e f(x)=\log_e f(x+h)-\log_e f(x)$

$$=\log_e\left\{\frac{f(x+h)}{f(x)}\right\}\left[\because \log_e{}^{(a/b)}=\log_e a-\log_e b\right]$$

$$=\log_e\left\{\frac{E(f(x))}{f(x)}\right\}$$

$$=\log_e\left\{\frac{(1+\Delta)f(x)}{f(x)}\right\}$$

$$=\log_e\left\{\frac{f(x)+\Delta f(x)}{f(x)}\right\}$$

$$=\log_e\left\{1+\frac{\Delta f(x)}{f(x)}\right\}$$ এটাই নির্ণেয় ফল।

উদা. 5 প্রমাণ করুন :

$$\Delta^2\left(\frac{1}{x+5}\right)=\frac{2}{(x+5)(x+6)(x+7)}$$ [যখন $h = 1$]

সমাধান : $\Delta^2\left(\frac{1}{x+5}\right)=\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+5}$

$$\Delta^2\left(\frac{1}{x+5}\right)=\Delta\left(\Delta\left(\frac{1}{x+5}\right)\right)$$

$$=\Delta\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+5}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{x+7}-\frac{1}{x+6}\right)-\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+5}\right)$$

$$=\frac{1}{x+7}-\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{x+7}-\frac{2}{x+6}+\frac{1}{x+5}$$

$$=\left(\frac{1}{x+7}-\frac{2}{x+6}\right)+\frac{1}{x+5}=\frac{(x+6)-2(x+7)}{(x+7)(x+6)}+\frac{1}{x+5}$$

$$=\frac{x+6-2x-14}{(x+7)(x+6)}+\frac{1}{x+5}$$

$$=\frac{-(x+8)}{(x+7)(x+6)}+\frac{1}{x+5}$$

$$=\frac{-(x+8)(x+5)+(x+6)(x+7)}{(x+5)(x+6)(x+7)}$$

$$=\frac{-x^2-13x-40+x^2+13x+42}{(x+5)(x+6)(x+7)}=\frac{2}{(x+5)(x+6)(x+7)}$$ **(প্রমাণিত)**

উদা. 6 যদি $f(x)=\tan^{-1}x$ এবং $h = 1$ হয় তবে $\Delta\left(\tan^{-1}x\right)$ নির্ণয় করুন।

সমাধান : $\Delta\left(\tan^{-1}x\right)$

$=\tan^{-1}(x+1)-\tan^{-1}x \quad (\therefore h=1)$

$$=\tan^{-1}\left\{\frac{(x+1)-x}{1+(x+1)x}\right\}$$

$=\tan^{-1}\left(\frac{1}{1+x^2+x}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)$, এটাই নির্ণেয় ফল।

উদা. 7 দেখান যে $\left(\frac{\Delta^2}{\mathrm{E}}\right)e^x\cdot\frac{\mathrm{E}\left(e^x\right)}{\Delta^2\left(e^x\right)}=e^x,$

[যেখানে Δ ও E প্রচলিত অর্থে, এবং x চলের সমব্যবধান $= h$]

সমাধান : এক্ষেত্রে,

$$\Delta\left(e^x\right)=e^{x+h}-e^x=e^x\left(e^h-1\right)$$

$$\therefore \Delta^2\left(e^x\right)=\Delta\left(\Delta\left(e^x\right)\right)=\Delta\left(e^{x+h}-e^x\right)$$

$$=\Delta\left(e^x\left(e^h-1\right)\right)=\left(e^h-1\right)\Delta\left(e^x\right)=\left(e^h-1\right)^2e^x$$

এখন, $\mathrm{E}\left(e^x\right)=e^{x+h}$ এবং $\frac{e^x}{\mathrm{E}}=\mathrm{E}^{-1}\left(e^x\right)=e^{x-h}$

$$\therefore\left(\frac{\Delta^2}{\mathrm{E}}\right)e^x\cdot\frac{\mathrm{E}\left(e^x\right)}{\Delta^2\left(e^x\right)}=\left(\Delta^2\mathrm{E}^{-1}\right)e^x\cdot\frac{e^{x+h}}{\Delta^2\left(e^x\right)}$$

$$=\Delta^2\left(E^{-1}\left(e^x\right)\right)\cdot\frac{e^{x+h}}{\Delta^2\left(e^x\right)}$$

$$=\Delta^2\left(e^{x-h}\right)\cdot\frac{e^{x+h}}{\Delta^2\left(e^x\right)}$$

$$=e^{-h}\cdot\Delta^2\left(e^x\right)\cdot\frac{e^{x+h}}{\Delta^2\left(e^x\right)}=e^{-h}\cdot e^{x+h}$$

$=e^{-h+x+h}=e^x$ এটাই নির্ণেয় ফল।

উদা. 8 $\Delta\log_e x$ নির্ণয় করুন, (যখন $h = 1$)

সমাধান ঃ $\Delta\log_e x = 1e\text{og}_e(x+1)-\log_e x$

$$=\log_e\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$=\log_e\left(1+\frac{1}{x}\right)$ **উত্তর :** $\log_e\left(1+\frac{1}{x}\right)$

উদা. 9 $\dfrac{\Delta^2\left(x^3\right)}{E\left(x^3\right)}=$ কত? (যখন $h = 1$)

সমাধান ঃ এস্থলে, $\dfrac{\Delta^2\left(x^3\right)}{E\left(x^3\right)}$

$$=\frac{\Delta\left(\Delta\left(x^3\right)\right)}{(x+1)^3}$$

$$=\frac{\Delta\left\{(x+1)^3-x^3\right\}}{(x+1)^3}=\frac{\Delta\left(x^3+3x^2+3x+1-x^3\right)}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{\Delta\left(3x^2\right) + \Delta(3x) + \Delta(1)}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{3 \cdot \Delta\left(x^2\right) + 3 \cdot \Delta(x) + 0}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{3\left\{(x+1)^2 - x^2\right\} + 3\{(x+1) - x\}}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{3(2x+1)+3}{(x+1)^3} = \frac{6(x+1)}{(x+1)^3} = \frac{6}{(x+1)^2}$$

উত্তর : নির্ণেয় $\dfrac{\Delta^2\left(x^3\right)}{\mathrm{E}\left(x^3\right)} = \dfrac{6}{(x+1)^2}$

উদা. 10. $h = 1$ ধরে, $(\Delta+\nabla)^2\left(x^2+x\right) = 8h^2$ প্রমাণ করুন।

সমাধান ঃ এক্ষেত্রে,

$$(\Delta+\nabla)\left(x^2+x\right)$$

$$= \Delta\left(x^2+x\right) + \nabla\left(x^2+x\right)$$

$$= \Delta\left(x^2\right) + \Delta(x) + \nabla\left(x^2\right) + \Delta(x)$$

$$= (x+h)^2 - x^2 + x + h - x + x^2 - (x-h)^2 + x - (x-h)$$

$$= (x+h)^2 - (x-h)^2 + h + \cancel{x} - \cancel{x} + h$$

$$= 4xh + 2h$$

$$\therefore (\Delta+\nabla)^2\left(x^2+x\right)$$

$$= (\Delta+\nabla)\left\{(\Delta+\nabla)\left(x^2+x\right)\right\}$$

$=(\Delta+\nabla)(4xh+2h)$

$=\Delta(4xh+2h)+\nabla(4xh+2h)$

$=4h\Delta(x)+2h\Delta(1)+4h\nabla(x)+2h\nabla(1)$

$=4h(x+h-x)+0+4h(x-(x-h))+0$

$=4h^2+4h^2$ [$\because \nabla(c)=0$ এবং $\Delta(c)=0$, যখন c একটি ধ্রুবক]

$= 8h^2$ (প্রমাণিত)

উদা. 11 পার্থক্যযুক্ত তালিকার মাধ্যমে $f(6)$ -এর মান বের করুন যখন $f(0) = -3, f(1) = 6, f(2) = 8, f(3) = 12$ (এক্ষেত্রে, স্পষ্টতই $h = 1$)

সমাধান ঃ পার্থক্য তালিকাটি হ'ল :

x	$y = f(x)$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	–3			
		9		
1	6		–7	
		2		9
2	8		2	
		4		
3	12			

$\therefore \Delta f(0)=9,\ \Delta^2 f(0)=-7$ এবং $\Delta^3 f(0)=9$

এখন $f(6)=f(0+6)=E^6 f(0)\ (\therefore h=1)$

$$=(1+\Delta)^6 f(0)=\left\{\binom{6}{0}+\binom{6}{1}\Delta+\binom{6}{2}\Delta^2+\binom{6}{3}\Delta^3+....+\binom{6}{6}\Delta^6\right\}f(0)$$

$$=\left(1+6\Delta+15\Delta^2+20\Delta^3+....+\Delta^6\right)f(0)\ \text{[এক্ষেত্রে, } \binom{n}{r}=nc_r=\frac{n!}{(n-r)!r!}\text{]}$$

$$= f(0)+6\Delta f(0)+15\Delta^2 f(0)+20\Delta^3 f(0)+0\left[\Delta^4 y=0=\Delta^5 y=\Delta^6 y\right]$$

$$=-3+6\times 9+15\times(-7)+20\times 9$$

$$=-3+54-105+180=234-108=126$$

$\therefore$ নির্ণেয় $f(6) = 126$ **(উত্তর)**

v¦zy. **12** (a) যদি $f(x)=ax$ তবে দেখান যে $\left(\mathrm{E}+\mathrm{E}^{-1}\right)f(x)=2f(x)$

সমাধান ঃ এস্থলে, $f(x)=ax.$

সুতরাং, $\mathrm{E}(f(x))=a(x+h)$

এবং $\mathrm{E}^{-1}(f(x))=a(x-h)$

$$\therefore\left(\mathrm{E}+\mathrm{E}^{-1}\right)f(x)=\mathrm{E}(f(x))+\mathrm{E}^{-1}(f(x))$$

$$=a(x+h)+a(x-h)$$

$$=a(x+h+x-h)=a(2x)$$

$=2ax=2f(x)$ (প্রমাণিত)

(b) যদি $u_n=2n+1$ হয় তবে দেখান যে $\Delta^2 u_n=0.$

সমাধান ঃ এক্ষেত্রে, $U_n=2n+1$

$$\Delta U_n=U_{n-1}-U_n=\{2(n+1)+1\}-(2n+1)$$

$$=2n+2+1-2n-1=2$$

এখন, $\Delta\, U_{n+1}=U_{n+2}-U_{n+1}=\{2(n+2)+1\}-\{2(n+1)+1\}$

$$=2n+4+1-2n-2-1=2.$$

$\therefore \Delta^2 U_n=\Delta U_{n+1}-\Delta U_n=2-2=0$ ইহাই নির্ণেয় ফল।

(c) প্রমাণ করুন যে, $\Delta.\nabla f(x)=(\Delta-\nabla)f(x)$ [Δ এবং ∇ যেখানে প্রচলিত অর্থ বহন করে]

সমাধান ঃ

বাঁদিক $\Delta.\nabla f(x)=\Delta\{f(x)-f(x-h)\}$

[এক্ষেত্রে, $\Delta\, f(x)=\Delta\big(f(x)\big)\;\Delta f(x)=\nabla\big(f(x)\big)$]

$$=\Delta f(x)-\Delta f(x-h)$$

$$=\{f(x+h)-f(x)\}-\{f(x)-f(x-h)\}$$

$$=f(x+h)-f(x)-f(x)+f(x-h)=f(x+h)-2f(x)+f(x-h)$$

ডান দিক $=(\Delta-\nabla)f(x)=\Delta f(x)-\nabla f(x)$

$$=\{f(x+h)-f(x)\}-\{f(x)-f(x-h)\}$$

$$=f(x+h)-f(x)-f(x)+f(x-h)$$

$$=f(x+h)-2f(x)+f(x-h)$$

সুতরাং বাঁদিক = ডানদিক (প্রমাণিত)

(d) যদি $y=ax^2+bx+c$ হয় (যেখানে $a,\ b,\ c$ ধ্রুবক) তবে দেখাও যে $\Delta^2 y$ একটি ধ্রুবক পদ।

সমাধান ঃ এস্থলে, $y=ax^2+bx+c$ একটি দ্বিঘাতযুক্ত অপেক্ষক।

$$\therefore\ \Delta y=f(x+h)-f(x)=\Big\{a(x+h)^2+b(x+h)+c\Big\}-\Big(ax^2+bx+c\Big)$$

$$=a\Big(x^2+2xh+h^2+bx+bh+c\Big)-ax^2-bx-c=2ahx+ah^2+bh$$

এখন, $2\Delta y=\Big\{2ah(x+h)+ah^2+bh\Big\}-\Big(2ahx+ah^2+bh\Big)$

$=2ahx+2ah^2+ah^2+bh-2ahx-ah^2-bh=2ah^2$ (যা একটি ধ্রুবক পদ) ইহাই নির্ণেয় ফল।

4.5 পার্থক্যধারক/পার্থক্যযুক্ত সমীকরণ

যে সমীকরণ একটি স্বাধীন চলক, অধীনস্থ চলক এবং পর্যায় ক্রমে অধীনস্থ চলকের পার্থক্য সমূহকে ধারণ করে তাকে 'পার্থক্য-ধারক সমীকরণ' (difference producing equation or difference equation) বা সংক্ষেপে 'পার্থক্য-সমীকরণ' বলা হয়। এই জাতীয় সমীকরণে অধীনস্থ চল রাশিগুলির মধ্যে পর্যায়ক্রমে পার্থক্য নির্দেশিত হয় সেই কারণে, পার্থক্যযুক্ত-সমীকরণ (বা পার্থক্য ধারক সমীকরণ) -কে স্বাধীন চল এবং অধীনস্থ চলরাশিসমূহের ধারক সমীকরণ হিসাবে অভিহিত করা হয়।

সুতরাং, 'পার্থক্য-ধারক সমীকরণ' হ'ল নিম্নরূপ :

$$g\left\{x, f(x), \Delta f(x), \ldots, \Delta^n f(x)\right\} = 0.$$

বিকল্পভাবে বলা যায় যে

$$h\{x, f(x), f(x+1), f(x+2), f(x+3), \ldots., f(x+n)\} = 0$$

এস্থলে, 'g' এবং 'h' জ্ঞাত হলেও 'f' অজ্ঞাত।

উদাহরণস্বরূপ, $f(x+2) - f(x+1) + 2f(x) = 0$ একটি পার্থক্য-সমীকরণ।

যদি $f(x)$ কে u_x হিসাবে প্রকাশ করা হয় তবে উপরিউক্ত পার্থক্য-সমীকরণটিকে $u_{x+2} - u_{x+1} + 2u_x = 0.....(1)$ আকারে লেখা যায়।

পার্থক্যযুক্ত সমীকরণের ক্রম (Order of difference equation) ঃ পার্থক্য সমীকরণের অন্তর্গত স্বাধীন চলরাশির সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন অবস্থাজ্ঞাপক সূচকের পার্থক্যকে ''পার্থক্য ধারক সমীকরণের'' ক্রম হিসাবে গণ্য করা হয়।

উদাহরণস্বরূপ, পূর্বোক্ত (1) নং পার্থক্যধারক সমীকরণের ক্রম = 2,

কারণ, $(x+2) - (x) = 2.$

পার্থক্য সমীকরণের সমাধান (Solution of difference equation) ঃ

স্বাধীন চল ও অধীনস্থ চলের মধ্যে যে সম্পর্ক বিরাজ করে তা যদি পার্থক্য-সমীকরণ কে সিদ্ধ (satisfy) করে তবে তাকেই বলা হয় পার্থক্য-সমীকরণের সমাধান (solution)। যদি পার্থক্য সমীকরণের ক্রম অনুসারে, সমাধানটি স্বেচ্ছাধীন ধ্রুবকের সংখ্যা সমান করে নেয় তবে সেই সমাধানকে 'সাধারণ সমাধান' (general solution) বা 'সম্পূর্ণ সমাধান' (complete solution or primitive) বলা হয়।

কিন্তু স্বেচ্ছাধীন ধ্রুবকের বিশেষ মানের মাধ্যমে পার্থক্যযুক্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হলে তাকে বিশেষ সমাধান (Particular solution) বলা হয়।

উদাহরণ হিসাবে পূর্বোক্ত (1) নং সমীকরণের সাধারণ সমাধান হ'ল (সমাধান করলে দেখা যায়) $c_1 2^x + c_2(-1)^x$ (যেখানে c_1, c_2 দুটি স্বেচ্ছাধীন ধ্রুবক কারণ পার্থক্য সমীকরণের ক্রম ছিল 2। c_1 এবং c_2 বিশেষ মানের জন্য প্রাপ্ত $5.2^x + 7.(-1)^x$ হ'ল পূর্বোক্ত (1) নং সমীকরণের বিশেষ সমাধান।

4.6 পার্থক্যযুক্ত সমীকরণের কতকগুলি গুরুত্বপূর্ণ আকার

(A) রৈখিক পার্থক্যযুক্ত সমীকরণ (Linear difference equation)

যে পার্থক্য-সমীকরণে $u_x, u_{x+1}, u_{x+2}, \cdots$ শুধুমাত্র এক মাত্রা (1st degree) নিয়ে অবস্থিত (অর্থাৎ এরা গুণফলের আকারে থাকবে না) তাকেই রৈখিক পার্থক্য-সমীকরণ বলা হয়। সেই হিসাবে নিচের সমীকরণ ঐ জাতীয় সমীকরণ যার মাত্রা n যখন $A_i\,(i = 1, 2, ..., n)$ হয় ধ্রুবক নতুবা x -এর অপেক্ষক :

$$u_{x+n} + A_1^u(x+n) - 1 + A_2^u(x+n) - 2 + ... + A_n u_x = B(x)....(1)$$

এক্ষেত্রে যখন B (x) = 0 হবে তখন (1) নং সমীকরণটি homogeneous সমমাত্রিক হবে অন্যথায় সমীকরণটি প্রকৃতিগত ভাবে non-homogeneous অ-সমামাত্রিক হবে।

(B) Homogeneous linear differene equation. with constant co-efficients (সমমাত্রিক পার্থক্যযুক্ত সমীকরণ যা ধ্রুবক সহগযুক্ত)

যদি $u_{x+n} + A_1 u_{(x+n)-1} + A_2 u_{(x+n)-2} + ... + A_n u_x = 0...(2)$ হয় (যেখানে A_i (i = 1,2,..., n) ধ্রুবক পদ), তবে সমীকরণ (2) (সমমাত্রিক পার্থক্যযুক্ত সমীকরণ যা ধ্রুবক সহগ যুক্ত) হিসাবে বিবেচিত হয়।

অন্যভাবে, $\phi(E)_{u_x} = 0....(3)$ যেখানে $\phi(E) \equiv E^n + A_1 E^{n-1} + A_2 E^{n-2} + ... + A_n$

$\phi(E)$ -কে (3) নং পার্থক্য সমীকরণের 'characteristic function' or complementary function' (c.f) (বৈশিষ্ট্যগত অপেক্ষক) বলা হয়।

এস্থলে, $\phi(m) = 0$ কে, পূরক অপেক্ষক (3) নং পার্থক্য সমীকরণের 'auxiliary equation' (সাহায্যকারী সমীকরণ) বলে।

(3) নং সমীকরণ

অর্থাৎ $\phi(E)u_x = 0$ এর সমাধান কল্পে দুটি প্রয়োজনীয় অংশ হ'ল :

(i) যদি $u_1(x)$, (3) নং সমীকরণের একটি সমাধান হয় তবে $c_1 u_1(x)$ ঐ সমীকরণের সমাধান হিসাবে গণ্য হবে যেখানে c_1 একটি স্বেচ্ছাধীন ধ্রুবক।

(ii) যদি (3) নং সমীকরণের $u_1(x), u_2(x), u_3(x), ..., u_n(x)$, n সংখ্যক স্বাধীন সমাধান হয় তবে উহার সম্পূর্ণ সমাধান (complete solution) হবে

$$u_x = c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + c_3u_3(x) + ... + c_nu_n(x)$$

যেখানে $c_i(i = 1, 2, 3, ..., n)$ স্বেচ্ছাধীন ধ্রুবক।

Solution of homogeneous equations (with constant co-efficients)

(ধ্রুবক সহগসম্পন্ন সমমাত্রিক সমীকরণ)

(a) প্রথম ক্রমের (1st order) পার্থক্যগত সমীকরণের ক্ষেত্রে ঃ

ধরি, প্রথম ক্রমের পার্থক্য সমীকরণ হ'ল :

$$u_{x+1} - au_x = 0 \text{ বা, } u_{x+1} = a_{ux} ...(1)$$

$x = 0, 1, 2, 3, ...,$ ইত্যাদি বসিয়ে (1) নং থেকে পাই

$$u_1 = au_0$$

$$u_2 = au_1 = a^2u_0$$

$$u_3 = au_2 = a^3u_0 \text{ ইত্যাদি}$$

সাধারণভাবে, $u_x = a^xu_0$

ধরি, $u_0 = c$ (ধ্রুবক একটি পদ $\neq 0$)

$\therefore u_x = ca^x$, হ'ল সাধারণ সমাধান (1) নং সমীকরণ সাপেক্ষে।

(b) দ্বিতীয় ক্রমের (2nd order) পার্থক্যগত সমীকরণের ক্ষেত্রে ঃ

ধরি, দ্বিতীয় ক্রমের পার্থক্য সমীকরণটি হ'ল

$$u_{x+2} + A_1u_{x+1} + A_2u_x = 0...(2)$$

'E' [স্থান-পরিবর্তনকারী চালক ঃ বা shift operator] -এর সাহায্যে পাই,

$$E^2(u_x) + A_1E(u_x) + A_2(u_x) = 0$$

$\therefore \phi(\mathrm{E})u_x = 0$ যেখানে $\phi(\mathrm{E}) = \mathrm{E}^2 + \mathrm{AE} + \mathrm{A}_2$ হ'ল E এর একটি মূলদ (পূর্ণ সংখ্যা) বিশিষ্ট অপেক্ষক। (2) নং সমীকরণের সমাধান কল্পে, ধরি, $u_x = a^x \left(a \neq 0\right)$

এখন (2) নং থেকে পাই [যখন $u_x = a^x, \left(a \neq 0\right)$]

$$u_x\left(a^2 + \mathrm{A}_1 a + \mathrm{A}_2\right) = 0$$

$\therefore a^x \neq 0$ অর্থাৎ $u_x \neq 0$, সুতরাং

$$a^2 + \mathrm{A}_1 a + \mathrm{A}_2 = 0 \ldots.(3)$$

(3) নং সমীকরণটি সাহায্যকারী সমীকরণ।

প্রথম ক্ষেত্রে ঃ (3) নং সাহায্যকারী সমীকরণের বীজ দুটি (অর্থাৎ α এবং β) ভিন্ন (distinct) হলে, (2) নং এর সাধারণ সমাধান হবে $u_x = c_1\alpha^x + c_2\beta^x$, (যেখানে c_1 এবং c_2 দুটি স্বেচ্ছাধীন ধ্রুবক)

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে ঃ (3) নং সাহায্যকারী সমীকরণের বীজ দুটি **পরস্পর সমান** (অর্থাৎ $\alpha = \beta$) হলে, (2) নং এর সাধারণ সমাধান হবে $u_x = \left(c_1 + c_2 x\right)\alpha^x$, (যেখানে c_1 এবং c_2 দুটি স্বেচ্ছাধীন ধ্রুবক)

তৃতীয় ক্ষেত্রে ঃ (3) নং সাহায্যকারী সমীকরণের বীজ দুটি জটিল (complex) আকারের অর্থাৎ ($\alpha + i\beta$) এবং ($\alpha - i\beta$), [α, β + R, R হ'ল বাস্তব সংখ্যার সেট, $\beta \neq 0$] হলে, (2) নং সমীকরণের সাধারণ সমাধান হবে $u_x = c_1\left(\alpha + i\beta\right)^x + c_2\left(\alpha - i\beta\right)^x$, (যেখানে c_1 এবং c_2 দুটি স্বেচ্ছাধীন ধ্রুবক)

(c) Particular Integrals of Non-homogeneous Equations (অসমমাত্রিক সমীকরণের বিশেষ সমাকল)

সাধারণ non-homogeneous (অসমমাত্রিক) রৈখিক পার্থক্যগত সমীকরণের আকারটি হ'ল

$\phi(\mathrm{E})u_x = \psi(x)$ (যা x চলযুক্ত একটি অপেক্ষক)

$\phi(\mathrm{E})u_x = 0$ কে সমাধান করে 'complementary function' বা C.F (পূরক অপেক্ষক) পাওয়া যাবে।

P.I (Particular integral), (বিশেষ সমাকল) : $u_x = \dfrac{1}{\phi(\mathrm{E})}\psi(x)$

বা, $u_x = \{\phi(E)\}^{-1}\psi(x)$ (যেখানে, E (স্থান-পরিবর্তনশীল চালক) = 1 + Δ

$\therefore$ এস্থলে, সাধারণ সমাধান, $u_x = C.F + P.I$ (পূরক অপেক্ষক) (বিশেষ সমাকল)

নীচেয় P.I নির্ণয় করার কয়েকটি কৌশল উল্লেখ করা হ'ল।

(i) ধরি, $\phi(E) = A_0 + A_1E + A_2E^2 + ... + A_nE^n$

$$\therefore \phi(E)a^x = A_0a^x + A_1E\left(a^x\right) + A_2E^2\left(a^x\right) + ... + A_nE^n\left(a^x\right)$$

$$= a^x\left(A_0 + A_1a + A_2a^2 + ... + A_na^n\right)$$

$$= a^x\phi(a)$$

$\therefore \frac{1}{\phi(E)}a^x = \frac{1}{\phi(a)}a^x$ (যখন $\phi(a) \neq 0$)

(ii) ধরি, $\psi(x)$ একটি x চলরাশির অপেক্ষক এবং $\phi(E)$, E এর একটি অপেক্ষক,

সুতরাং, $\phi(E) = A_0 + A_1E + A_2E^2 + ... + A_nE^n$

উপরিউক্ত পদ্ধতি অবলম্বনে,

$$\phi(E)a^x\psi(x) = a^x\phi(aE)\psi(x)$$

$\therefore \frac{1}{\phi(E)}a^x\psi(x) = a^x\frac{1}{\phi(aE)}\psi(x)$, যখন $\phi(aE) \neq 0$

নীচের উদাহরণগুলি আমাদের ধারণাকে আরও পরিস্কার ক'রবে।

উদা. 1 যদি $u_x = cx - 5$, [যেখানে c একটি ধ্রুবক] হয় তবে পার্থক্যগত সমীকরণটি গঠন করুন।

সমাধান ঃ এক্ষেত্রে, $u_x = cx - 5....(1)$

$$\therefore u_{x-1} = c(x-1) - 5$$

বা, $u_{x-1} - c(x-1) + 5 = 0$

বা, $u_{x-1} - \frac{u_x + 5}{x}(x-1) + 5 = 0$ [(1) নং সম্পর্ক থেকে]

বা, $xu_{x-1} - (x-1)u_x - 5(x-1) + 5x = 0$

বা, $xu_{x-1} - (x-1)u_x - 5x + 5 + 5x = 0$

বা, $xu_{x-1} - (x-1)u_x + 5 = 0$

বা, $(x-1)u_x - xu_{x-1} = 5$ এটাই নির্ণেয় পার্থক্যগত সমীকরণ।

উদা. 2 সমাধান করুন :

$$3u_{x+2} + u_{x+1} - 2u_x = 0$$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণটি নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করে পাই

$\left(3E^2 + E - 2\right)u_x = 0$ [যেখানে E হল 'স্থান পরিবর্তনকারী' চালক]

$\therefore$ সাহায্যকারী সমীকরণটি হ'ল

$$3m^2 + m - 2 = 0$$

বা, $3m^2 + 3m - 2m - 2 = 0$

বা, $3m(m+1) - 2(m+1) = 0$

বা, $(m+1)(3m-2) = 0$

$m + 1 = 0$ অথবা $3m - 2 = 0$

সুতরাং, $m = -1, \frac{2}{3}$

$\therefore u_x = c_1(-1)^x + c_2\left(\frac{2}{3}\right)^x$ [যেখানে c_1 এবং c_2 হ'ল দুটি স্বেচ্ছাধীন ধ্রুবক]

উদা. 3 সমাধান করুন :

$$u_{x+2} - 2u_{x+1} + 2u_x = 0$$

প্রদত্ত সমীকরণটি হ'ল $\left(E^2-2E+2\right)u_x=0$

সমাধান : এস্থলে, সাহায্যকারী সমীকরণটি হ'ল $m^2-2m+2=0$

$$\therefore m=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}$$

$$=1\pm(1)i$$

ধরি, 1 = r cos θ এবং 1 = r sin θ

(বাস্তব অংশ উপস্থিত 1 এর জন্য) (কাল্পনিক অংশ উপস্থিত 1 এর জন্য)

$\therefore r=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$ (যখন $r > 0$) ($\because r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=1^2+1^2$)

বা, $r^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)=2$

বা, $r^2=2$

$\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}=\frac{1}{1}$ বা $\tan\theta=1$

$\therefore\theta=\tan^{-1}1$

$=\tan^{-1}\tan\frac{\pi}{4}$

$=\frac{\pi}{4}$

সুতরাং, $u_x=(2)^{x/2}\left(c_1\cos\frac{\pi}{4}x+c_2\sin\frac{\pi}{4}x\right)$,

[যখন c_1 এবং c_2 হ'ল দুটি স্বেচ্ছাধীন ধ্রুবক]

উদা. 4 সমাধান করুন :

$$u_{n+2}-4u_{n+1}+4u_n=0$$

সমাধান : ধরি $u_n=k^n\left(\neq 0\right)$

$$u_{n+1}=k^{n+1}$$

$$u_{n+2}=k^{n+2}$$

প্রদত্ত সমীকরণ থেকে পাই

$$k^{n+2}-4k^{n+1}+4k^n=0$$

বা, $k^n\left(k^2-4k+4\right)=0$

$\therefore k^2-4k+4=0\left(\because k^n\neq 0\right)$

বা, $(k-2)^2=0$

সুতরাং, $k=2,\ 2$.

স্বাভাবিক ভাবে, $u_n = A.2^n$ (যখন A একটি স্বেচ্ছাধীন ধ্রুবক) প্রদত্ত সমীকরণের একটি সমাধান। কিন্তু, সমাধানে একটি মাত্র ধ্রুবক যুক্ত থাকায় একে সাধারণ সমাধান হিসাবে গণ্য করা যায় না।

সেজন্য ধরি, $u_n=2^n v_n$; প্রদত্ত সমীকরণ থেকে পাই

$$2^{n+2}v_{n+2}-4.2^{n+1}v_{n+1}+4.2^n v_n=0$$

বা, $2^{n+2}\left(v_{n+2}-2v_{n+1}+v_n\right)=0$

বা, $v_{n+2}-2v_{n+1}+v_n=0\left(\because 2^{n+2}\neq 0\right)$

বা, $\Delta^2\left(v_n\right)=0$

এটি থেকে স্পষ্ট হয় যে $\Delta\left(v_n\right)$ একটি ধ্রুবক পদ এবং v_n একটি বহুপদযুক্ত রাশি যাতে n -এর সর্বোচ্চ মাত্রা এক।

সুতরাং, $v_n = \mathrm{A} + \mathrm{B}.n$ (যখন A এবং B দুটি স্বেচ্ছাধীন ধ্রুবক)

$\therefore u_n = 2^n v_n = 2^n (\mathrm{A} + \mathrm{B}n)$, একটি সাধারণ সমাধান (প্রদত্ত সমীকরণের) কারণ, এতে দুটি পরস্পর স্বাধীন ধ্রুবক উপস্থিত আছে। **উত্তর :** $u_n = 2^n (\mathrm{A} + \mathrm{B}n)$

উদা. 4 সমাধান করুন :

$$u_{x+2} + u_{x+1} - 12u_x = 5^x,\ x \geq 1.$$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণকে নিম্নোক্ত উপায়ে প্রকাশ করে পাই,

$$\mathrm{E}^x u_x + \mathrm{E}u_x - 12u_x = 5^x$$ [যেখানে E হ'ল স্থান পরিবর্তনকারী চালক]

পূরক অপেক্ষক (complementary function) নির্ধারণের জন্য আমরা $u_x = k^x$ ধ'রব।

ফলে, $u_{x+1} = k^{x+1}$ এবং $u_{x+2} = k^{x+2}$

যদি $k^{x+2} + k^{x+1} - 12k^x = 0$ হয়, তবে এর মাধ্যমে প্রদত্ত সমীকরণ সিদ্ধ হয়। সেক্ষেত্রে,

$$k^2 + k\ \ -12 = 0 \ \left(\because k^x \neq 0\right)$$

বা, $(k-3)(k+4) = 0$

$k - 3 = 0$ অথবা, $k + 4 = 0$

$\therefore k = 3, -4$

সুতরাং, 3^x এবং $(-4)^x$ দুটি স্বাধীন বিশেষ সমাধান হিসাবে পরিচিত।

ফলে পূরক সমাধান বা পূরক সমীকরণ (C.F)

$= \mathrm{A}.3^x + \mathrm{B}(-4)^x$ (যেখানে A ও B দুটি স্বেচ্ছাধীন ধ্রুবক)

এখন বিশেষ সমাকল (Particular integral বা P.I) নির্ণয় করার পালা।

$$\therefore \mathrm{P.I} = \frac{1}{\mathrm{E}^2 + \mathrm{E} - 12} \cdot 5^x$$

$$= \frac{1}{5^2 + 5 - 12} \cdot 5^x = \frac{5^x}{30 - 12} = \frac{5^x}{18}$$

সুতরাং সম্পূর্ণ সাধারণ সমাধান (complete general solution) হ'ল

$u_x = A.3^x + B.(-4)^x + \frac{1}{18}.5^x$ **(উত্তর)**

উদা. 5 সমাধান করুন :

$$u_{x+2} - 8u_{x+1} + 25u_x = 2x^2 + x + 1$$

সমাধান : এক্ষেত্রে,

$$u_{x+2} - 8u_{x+1} + 25u_x = 2x^2 + x + 1 .....(1)$$

এটি একটি (non-homogeneous equation) অসমমাত্রিক সমীকরণ। এটিকে সর্বপ্রথম সমমাত্রিক (homogeneous) আকারে প্রকাশ করে পাই,

$$u_{x+2} - 8 \cdot u_{x+1} + 25u_x = 0 .....(2)$$

(2) নং সমীকরণের সাধারণ সমাধান হবে (1) নং সমীকরণের পূরক অপেক্ষক (c.f.)।

এখন আমরা (2) নং সমীকরণের সাধারণ সমাধান নির্ণয় ক'রব। সেজন্য, ধরি, $u_x = k^x (\neq 0)$.

$\therefore$ সাহায্যকারী সমীকরণটি হ'ল :

$$k^2 - 8k + 25 = 0$$

বা, $k = \frac{-(8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25}}{2 \cdot 1}$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 100}}{2}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{8 \pm 6i}{2} \left(\because i = \sqrt{-1}\right)$$

$$= 4 \pm 3i$$

$\therefore$ c.f (পূরক অপেক্ষক) $= A(4+3i)^x + B(4-3i)^x$

(যেখানে A ও B দুটি স্বাধীন ধ্রুবক)

$$= \mathrm{A}v^x(\cos x\theta + i\sin x\theta) + B(\cos x\theta - i\sin x\theta)$$

যেখানে, $4 = r\cos\theta$ এবং $3 = r\sin\theta$

এখান থেকে পাই $r = 5$ এবং $\tan\theta = 3/4$ বা $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

[$\therefore r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = 4^2 + 3^2$

বা, $r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 16 + 9 = 25$

বা, $r^2 \cdot 1 = 25$ বা, $r^2 = 25$

বা, $r = 5(\because r > 0)$ এবং $\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \frac{3}{4}$ বা, $\tan\theta = \frac{3}{4}$]

বা, $c.f = r^x\{(\mathrm{A}+\mathrm{B})\cos x\theta + i(\mathrm{A}-\mathrm{B})\sin x\theta\}$

$$= r^x(c_1\cos x\theta + c_2\sin x\theta)$$

[যেখানে স্বেচ্ছাধীন ধ্রুবক c_1 = (A + B) এবং $c_2 = i$ (A – B)]

বিশেষ সমাকল (particular integral বা P.I) নির্ণয় করতে আমরা এখন হাতে পেয়েছি

$(\mathrm{E}^2 - 8\mathrm{E} + 25)u_x = 2x^2 + x + 1$ (E একটি স্থান পরিবর্তনকারী চালক)

বা, $u_x = \frac{1}{\mathrm{E}^2 - 8E + 25}(2x^2 + x + 1)$

$$= \frac{1}{(1+\Delta)^2 - 8(1+\Delta) + 25}(2x^2 + x + 1) \ [\because \mathrm{E} = 1 + \Delta]$$

$$= \frac{1}{1 + 2\Delta + \Delta^2 - 8 - 8\Delta + 25}(2x^2 + x + 1)$$

$$= \frac{1}{\Delta^2 - 6\Delta + 18}(2x^2 + x + 1)$$

$$=\frac{1}{18\left(1-\frac{6\Delta-\Delta^2}{18}\right)}\left(2x^2+x+1\right)$$

$$=\frac{1}{18}\left\{1+\left(\frac{6\Delta-\Delta^2}{18}\right)+\left(\frac{6\Delta-\Delta^2}{18}\right)^2+\left(\frac{6\Delta-\Delta^3}{18}\right)^3+\cdots\right\}\left(2x^2+x+1\right)$$

$\left(\because (1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+....\right)$

$$=\frac{1}{18}\left\{1+\frac{\Delta}{3}-\frac{\Delta^2}{18}+\frac{1}{3}\Delta^2-\frac{2}{3}\Delta^3+\frac{1}{18^2}\Delta^4+....\right\}\left(2x^2+x+1\right)$$

$$=\frac{1}{18}\left(1+\frac{\Delta}{3}+\frac{5}{18}\Delta^2\right)\left(2x^2+x+1\right)$$

[কারণ, $\Delta^3 f=\Delta^4 f=....=0,$ যখন, $f=2x^2+x+1$]

$$=\frac{1}{18}\left(2x^2+x+1\right)+\frac{1}{54}(4x+1)+\frac{5}{18}(4)$$

$$=\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{18}x+\frac{1}{18}+\frac{2}{27}x+\frac{1}{54}+\frac{10}{9}$$

$$=\frac{1}{9}x^2+\frac{7}{54}x+\frac{32}{27}=\frac{1}{54}\left(6x^2+7x+64\right)$$

$\therefore$ নির্ণেয় সম্পূর্ণ সাধারণ সমাধান (complete general solution) : u_x = c.f + P.I

বা, $u_x=r^x\left(c_1\cos\theta x+c_2\sin\theta x\right)+\frac{1}{54}\left(6x^2+7x+64\right)$

[যেখানে, r = 5 এবং $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$] **(উত্তর)**

উদা. 6 সমাধান করুন :

$$u_{x+2}-3u_{x+1}-4u_x=2^x$$

সমাধান : এক্ষেত্রে, প্রদত্ত সমীকরণটি হ'ল $u_{x+2}-3u_{x+1}-4u_x=2^x$

[ইহা চরিত্রগতভাবে হ'ল অসমমাত্রিক সমীকরণ] (non-homogeneous)

বা, $\left(\mathrm{E}^2-3\mathrm{E}-4\right)u_x=2^x.....(1)$ (যেখানে E হ'ল স্থান পরিবর্তনকারী চালক)

(1) নং সমীকরণের সাহায্যকারী সমীকরণটি হ'ল

$m^2-3m-4=0$ বা, $(m-4)(m+1)=0$

$m-4=0$ অথবা, $m+1=0$

$\therefore m=4,-1$

$\therefore$ C.F (Complementary function, পূরক অপেক্ষক) $=c_1(4)^x+c_2(-1)^x$

(যেখানে c_1 এবং c_2 দুটি স্বেচ্ছাধীন ধ্রুবক)

এখন P.I (বিশেষ সমাকল)

$$=\frac{1}{\mathrm{E}^2-3\mathrm{E}-4}\cdot 2^x$$

$$=\frac{1}{2^2-3\cdot 2-4}\cdot 2^x$$

$$=\frac{1}{4-6-4}\cdot 2^x=-\frac{1}{6}\cdot 2^x=-\left(\frac{2^x}{6}\right)$$

$\therefore$ নির্ণেয় সম্পূর্ণ সাধারণ সমাধান (complete general solution) :

$$u_x=c_1(4)^x+c_2(-1)^x-\frac{2^x}{6}$$ **(উত্তর)**

সমাধান করুন :

উদা. 7 $u_{x+2}-7u_{x+1}+4u_x=2\cdot e^{3x}$

সমাধান : এস্থলে, সমীকরণটি হ'ল :

$$3u_{x+2}-7u_{x+1}+4u_x=2\cdot e^{3x}$$

বা, $\left(3.E^2-7E+4\right)u_x=2.e^{3x}....(1)$

(1) নং সমীকরণের সাহায্যকারী সমীকরণটি হ'ল

$3m^2-7m+4=0$ বা, $3m^2-3m-4m+4=0$

বা, $3m(m-1)-4(m-1)=0$

বা, $(m-1)(3m-4)=0$

$m-1=0$ অথবা $3m-4=0$

$\therefore m=1,\ 4/3$

এখন, C.F (পূরু অপেক্ষক) [(1) নং সমীকরণর প্রেক্ষিতে]

$=c_1\cdot(1)^x+c_2\left(\frac{4}{3}\right)^x$ [যেখানে $c_1,\ c_2$ হ'ল দুটি স্বেচ্ছাধীন ধ্রুবক]

P.I (বিশেষ সমাকল)

$$=\frac{1}{3E^2-7E+4}\cdot 2e^{3x}$$

$$=2\cdot\frac{1}{3E^2-7E+4}\left(e^3\right)^x$$

$$=\frac{2\cdot e^{3x}}{3\left(e^3\right)^2-7\left(e^3\right)+4}$$

$$=\frac{2\cdot e^{3x}}{3e^6-7e^3+4}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সম্পূর্ণ সাধারণ সমাধান [(1) নং সমীকরণের] :

$u_x=c_1(1)^x+c_2\left(\frac{4}{3}\right)^x+\frac{2e^{3x}}{3e^6-7e^3+4}$ **(উত্তর)**

উদা. 8 সমাধান করুন :

$$u_{x+2} - 7u_{x+1} + 12u_x = \sin x$$

সমাধান : এক্ষেত্রে প্রদত্ত (অ-সমমাত্রিক) সমীকরণটি হ'ল

$$u_{x+2} - 7u_{x+1} + 12u_x = \sin x$$

বা, $\left(E^2 - 7E + 12\right)u_x = \sin x .....(1)$

(1) নং সমীকরণের সাহায্যকারী সমীকরণটি হ'ল ঃ

$$m^2 - 7m + 12 = 0$$

বা, $m^2 - 3m - 4m + 12 = 0$

বা, $m(m-3) - 4(m-3) = 0$

বা, $(m-3)(m-4) = 0$

$m - 3 = 0$ অথবা, $m - 4 = 0$

$\therefore m = 3, 4$

(1) নং সমীকরণের ক্ষেত্র বিবেচনা করলে পাই

C·F (পূরক অপেক্ষক) $= c_1(3)^x + c_2(4)^x$

$$= c_1 3^x + c_2 4^x$$

[যেখানে c_1, c_2 স্বেচ্ছাধীন ধ্রুবক]

এবং P.I (বিশেষ সমাকল)

$$= \frac{1}{E^2 - 7E + 12} \sin x$$

$= \frac{1}{E^2 - 7E + 12} \cdot e^{ix}$ এর কাল্পনিক অংশ (imaginary part)

$$=\frac{1}{e^{2i}-7e^{i}+12}e^{ix}$$ এর কাল্পনিক অংশ

$$=\frac{1}{(\cos 2+i\sin 2)-7(\cos 1+i\sin 1)+12}e^{ix}$$ এর কাল্পনিক অংশ

$$=\frac{1}{(\cos 2-7\cos 1+12)+i(\sin 2-7\sin 1)}e^{ix}$$ এর কাল্পনিক অংশ

$$=\frac{(\cos 2-7\cos 1+12)-i(\sin 2-7\sin 1)}{(\cos 2-7\cos 1+12)^2+(\sin 2-7\sin 1)^2}(\cos x+i\sin x)$$ এর কাল্পনিক অংশ

$$=\frac{\{(\cos 2-7\cos 1+12)\sin x\}-\{(\sin 2-7\sin 1)\cos x\}}{(\cos 2-7\cos 1+12)^2+(\sin 2-7\sin 1)^2}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সম্পূর্ণ-সাধারণ সমাধান [(1) নং সমীকরণের প্রেক্ষিতে] হ'ল

$$u_x=c_1\cdot 3^x+c_2\cdot 4^x+\left[\frac{\{(\cos 2-7\cos 1+12\sin x)-(\sin 2-7\sin 1)\cos x\}}{(\cos 2-7\cos 1+12)^2+(\sin 2-7\sin 1)^2}\right]$$ **(উত্তর)**

4.7 বিশেষ আলোচনা

সসীম পার্থক্যের ক্ষেত্রে এবং পার্থক্যযুক্ত সমীকরণে 'factorial function' (উৎপাদকযুক্ত অপেক্ষক) -এর প্রয়োগাবলি ঃ

প্রথম ক্ষেত্রে,

(A) উৎপাদকযুক্ত অপেক্ষক (factorial function) -এর সংজ্ঞানুসারে বলা যায় যে

$(a)_n=a(a+1)(a+2)....(a+n-1)$ [যখন, $n\geq 1$] এবং $(a)_0=1$ [যখন $a\neq 0$]

বি.দ্র. (i) $(1)_n=n!$

(ii) $(a)_{2n}=\left[a(a+2)....(a+2n-2)\right]\left[(a+1)(a+3)....(a+2n-1)\right]$

$$=2^{2n}\left(\frac{a}{2}\right)_n\left(\frac{a+1}{2}\right)$$

(iii) $(a)_n = \frac{\Gamma(a+h)}{\Gamma(n)}$, [যখন $a \neq 0$ এবং a ঋনাত্মক অখন্ড সংখ্যা নয়]

যখন, $\Gamma(x) = \int e^{-x}x^{x-1}dx, n > 0$ এদের প্রয়োগ কারিক অপেক্ষক নির্ণয় কালে প্রভূত ভাবে পরিলক্ষিত হয়।

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে,

(B) উৎপাদকযুক্ত অপেক্ষককে পার্থক্যযুক্ত সমীকরণেও প্রয়োগ করা হয়। এখন এই সম্পর্কে আমরা আলোচনা ক'রব।

যদি n ধনাত্মক অখন্ড সংখ্যা হয় তবে x -এর n -তম মাতযুক্ত রাশিকে $x^{(n)}$ বা $[x]^n$ হিসাবে প্রকাশ করা হয় এবং সংজ্ঞা স্বরূপ $x^{(n)} = x(x-h)(x-2h)....(x-(n-1)h)$

বিশেষভাবে, $x^{(0)} = 1$ এবং $x^{(1)} = x....(1)$

উৎপাদকযুক্ত অপেক্ষকের ক্ষেত্রে অগ্রবর্তী বিভেদকারী চালকের প্রভাব হবে নিম্নরূপ :

$$\Delta\left(x^{(n)}\right) = (x+h)^{(n)} - x^{(n)}$$

$$= \left\{(x+h)x(x-h)....(x-(n-2h))\right\} - \left\{x(x-h)(x-2h)...(x-(n-1)h)\right\}$$

$$= x(x-h).....(x-(n-2h)).nh$$

$$= (nh)x^{(n-1)}.....(2)$$

অনুরূপে, $\Delta^2\left(x^{(n)}\right) = n(n-1)h^2x^{(n-2)}....(3)$

বি.দ্র. (i) $\Delta^r\left(x^{(n)}\right) = n(n-1)(n-2)....(x-(r-1))h^r x^{(n-r)}$, যখন r = 1,2,....n

= 0, যখন $r > n$.

(ii) **(2) নং থেকে,**

$$x^{(n-1)} = \frac{\Delta\left(x^{(n)}\right)}{nh}.$$

$\therefore \Delta^{-1}\left(x^{(n-1)}\right)=\frac{x^{(n)}}{nh}+$ ধ্রুবক

স্বাভাবিক ভাবে, $\Delta^{-1}\left(x^{(n)}\right)=\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)h}+$ ধ্রুবক।

উদা. (1) যদি $f(x)=x^4-3x^3+4x^2-7x+6$ হয় তবে একে উৎপাদক অপেক্ষক হিসাবে প্রকাশ কর। $\Delta^2 f(x)$ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ এক্ষেত্রে,

$f(x)=x^4-3x^3+4x^2-7x+6....(1)$ [প্রদত্ত]

ধরি, $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)+\text{A}x(x-1)(x-2)\ +\text{B}x(x-1)+cx+\text{D}.....(2)$

$\therefore$ স্পষ্টতই, $x^4-3x^3+4x^2-7x+6$

$$=x(x-1)(x-2)(x-3)+\text{A}x(x-1)(x-2)+\text{B}x(x-1)+\text{C}x+\text{D}$$

(3) নং সম্পর্কে, $x = 0$

বসিয়ে পাই, D = 6.

(3) নং সম্পর্কে, $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$1-3+4-7+6=\text{C}\cdot 1+\text{D}$

বা, C + D = 1 বা, C + 6 = 1 ($\therefore$ D = 6) বা, C = – 5

(3) নং সম্পর্কে, $x = 2$ বসিয়ে পাই,

$16-24+16-14+6=2\text{B}+2\text{C}+\text{D}$

বা, $38-38=2\text{B}+2(-5)+6\ \ (\therefore \text{C}=-5,\text{D}=6)$

বা, $2\text{B}-4=0$ বা, B = 2

(3) নং সম্পর্কে, $x = 3$ বসিয়ে পাই,

$81-81+36-21+6=6\text{A}+6\text{B}+3\text{C}+\text{D}$

বা, $6\text{A}+6(2)+3(-5)+6=21$ ($\therefore$B = 2, C = – 5 এবং D = 6)

বা, 6A = 21 − 3 বা, 6A = 18 বা, A = 3

সুতরাং পরিশেষে, $f\left(x\right)=x^{(4)}+3\cdot x^{(3)}+2\cdot x^{(2)}-5\cdot x^{(1)}+6$

$\therefore \Delta\left(f\left(x\right)\right)=4x^{(3)}+9x^{(2)}+4x^{(1)}-5$ ($\because\ \Delta\ (x)^{(n)} = nhx^{(n-1)}$ এখানে, $h = 1$

$=4x\left(x-1\right)\left(x-2\right)+9x\left(x-1\right)+4x-5$

$=4x\left(x^{2}-3x+2\right)+9x^{2}-9x+4x-5$

$=4x^{3}-12x^{2}+8x+9x^{2}-9x+4x-5$

$=4x^{3}-3x^{2}+3x-5$

এবং $\Delta^{2}\left(f\left(x\right)\right)=\Delta^{2}\left(x^{(4)}+3x^{(3)}+2x^{(2)}-5x^{(1)}+6\right)$

$\left[\because \Delta^{2}\left(x^{(n)}=n\left(n-1\right)h^{2}x^{(x-2)}\right)=n\left(n-1\right)x^{(n-2)},\ \because h=1\right]\left(\because x^{o}=1,\ x\neq 0\right)$

$=4.3.x^{(2)}+3.3.2.x^{(1)}+2.2.x^{o}$

$=12x^{(2)}+18x^{(1)}+4$

$=12\left\{x\left(x-1\right)\right\}+18x+4$

$=12\left(x^{2}-x\right)+18x+4$

$=12x^{2}-12x+18x+4$

$=12x^{2}+6x+4$

উত্তর : $\Delta\left(f\left(x\right)\right)=4x^{3}-3x^{2}+3x-5$

এবং $\Delta^{2}\left(f\left(x\right)\right)=12x^{2}+6x+4$

উদা. 2 যদি $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3x - 10$ হয় তবে উৎপাদকীয় প্রতীকে $\Delta\left(f(x)\right)$এবং $\Delta^2\left(f(x)\right)$ নির্ণয় করুন। পরবর্তী স্তরে, সেই অপেক্ষকটিকে খুজে বার কর যার প্রথম পার্থক্য হ'ল $f(x)$ [ধরে নিন $h = 1$]

সমাধান : এক্ষেত্রে, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3x - 10$

ধরি, $f(x) = \mathrm{A}x(x-1)(x-2) + \mathrm{B}x(x-1) + \mathrm{C}x + \mathrm{D}$

[যেখানে, A, B, C, D হ'ল ধ্রুবক পদ]

$\therefore$ স্পষ্টতই, $\mathrm{A}x(x-1)(x-2) + \mathrm{B}x(x-1) + \mathrm{C}x + \mathrm{D} = 2x^3 - 3x^2 + 3x - 10.....(1)$

(1) নং সম্পর্কে $x = 0$ বসিয়ে পাই, D = – 10

(1) নং সম্পর্কে $x = 1$ বসিয়ে পাই, $\mathrm{C}.1 + \mathrm{D} = 2 - 3 + 3 - 10$

বা, $\mathrm{C} + \mathrm{D} = -8$ বা, $\mathrm{C} = -8 - \mathrm{D}$

$$= -8 - (-10)$$

$$= -8 + 10 \ (\because \mathrm{D} = -10)$$

$$= 2 \ \therefore \mathrm{C} = 2$$

(1) নং সম্পর্কে $x = 2$ বসিয়ে পাই,

$\mathrm{B}.2.1 + \mathrm{C}.2 + \mathrm{D} = 16 - 12 + 6 - 10$

বা, $2\mathrm{B} + 2(2) + (-10) = 0 \ (\therefore \mathrm{C} = 2, \mathrm{D} = -10)$

বা, 2B = 6 বা, B = 3

(1) নং সম্পর্কের উভয় পক্ষে x^3 এর সদৃশ তুলনা করে পাই A = 2

সুতরাং (1) নং সম্পর্ক থেকে পাই

$$f(x) = 2x^{(3)} + 3x^{(2)} + 2x^{(1)} - 10$$

$$\therefore \Delta\left(f(x)\right) = 2.3x^{(2)} + 3.2x^{(1)} + 2.1.x^{\circ}$$

$$= 6x^{(2)} + 6x^{(1)} + 2 \left[\therefore \Delta\left(x^{(n)} = nhx^{(n-1)} = nx^{n-1}, h = 1\right) \text{ বলে } \right] \left(\because x^0 = 1,\ x \neq 0\right)$$

$$\Delta^2\left(f(x)\right)=\Delta\left(\Delta f(x)\right)$$

$$=6\Delta x^{(2)}+6\Delta x^{(1)}+\Delta^{(2)}$$

$$=6.2x^{(1)}+6.1.x^{o}+0$$

$$=12x^{(1)}+6\left(\because x^0=1,\ x\neq 0\right)$$

ধরি, $g\ (x)$ হ'ল সেই অপেক্ষক যার 'প্রথম পার্থক্য' (যা অগ্রবর্তী পার্থক্য চালকের মাধ্যমে ঘটে) হ'ল $f\ (x)$

$$\therefore \Delta\left(g(x)\right)=f(x)$$

$$=2x^{(3)}+3x^{(2)}+2x^{(1)}-10$$

বা, $g(x)=\Delta^{-1}\left(2x^{(3)}+3x^{(2)}+2x^{(1)}-10\right)$

$$=2\Delta^{-1}\left(x^{(3)}\right)+3\Delta^{-1}\left(x^{(2)}\right)+2\Delta^{-1}\left(x^{(1)}\right)-\Delta^{-1}(10)$$

$$=2.\frac{x^{(4)}}{4}+3.\frac{x^{(3)}}{3}+2.\frac{x^{(2)}}{2}-10.\frac{x^{(1)}}{1}+k\ \ (k=\text{ধ্রুবক})$$

$$=\frac{1}{2}\cdot x^{(4)}+x^{(3)}+x^{(2)}-10x^{(1)}+k$$

$$=\frac{1}{2}x(x-1)(x-2)(x-3)+x(x-1)(x-2)+x(x-1)-10x+k$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(x^4-6x^3+11x^2-6x\right)+2\left(x^3-3x^2+2x\right)+2\left(x^2-x\right)-20x\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^4-6x^3+11x^2-6x+2x^3-6x^2+4x+2x^2-2x-20x\right)+k$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^4-4x^3+7x^2-24x\right)+k$$

উত্তর : $\Delta\left(f(x)\right)=6.x^{(2)}+6.x^{(1)}+2,$

$$\Delta^2\left(f\left(x\right)\right)=12.x^{(1)}+6$$

এবং নির্ণেয় অপেক্ষক $\left(g\left(x\right)\right)=\frac{1}{2}\left(x^4-4x^3+7x^2-24x\right)+k$

উদা. 3 সমাধান করুন : $u_{x+2}-7u_{x+1}-8u_x=x^{(2)}.2^x$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণটিকে নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা যায় :

$\left(\mathrm{E}^2-7\mathrm{E}-8\right)u_x=x^{(2)}\cdot 2^x....(1)$ (যেখানে ‘E’ হল স্থান পরিবর্তনকারী চালক)

(1) নং সমীকরণের সাহায্যকারী সমীকরণ হ’ল $m^2-7m-8=0$

এখন, $m^2-7m-8=0$ থেকে পাই

$$m^2+m-8m-8=0$$

বা, $m\left(m+1\right)-8\left(m+1\right)=0$

বা, $\left(m+1\right)\left(m-8\right)=0$

$\therefore m=-1,8$

সুতরাং পূরক অপেক্ষক (complementary function বা C.F)

$=\mathrm{A}.\left(-1\right)^x+\mathrm{B}.\left(8\right)^x$ (যেখানে A এবং B দুটি স্বেচ্ছাধীন ধ্রুবক)

এখন আমরা ‘particular integral’ (P·I) [বিশেষ সমাকল] নির্ণয় ক’রব।

এস্থলে, $u_x=\frac{1}{\mathrm{E}^2-7\mathrm{E}-8}\left(x^{(2)}.2^x\right)$

$$=2^x\cdot\frac{1}{\left(2\mathrm{E}\right)^2-7\left(2\mathrm{E}\right)-8}\cdot x^{(2)}$$

$$=2^x\cdot\frac{1}{4\mathrm{E}^2-14\mathrm{E}-8}\cdot x^{(2)}$$

$$= 2^x \cdot \frac{1}{4(1+\Delta)^2 - 14(1+\Delta) - 8} \cdot x^{(2)} \quad [\because \mathrm{E} = 1+\Delta]$$

$$= 2^x \cdot \frac{1}{4\left(1+2\Delta+\Delta^2\right) - 14(1+\Delta) - 8} \cdot x^{(2)}$$

$$= 2^x \cdot \frac{1}{4+8\Delta+4\Delta^2 - 14 - 14\Delta - 8} \cdot x^{(2)}$$

$$= 2^x \cdot \frac{1}{4\Delta^2 - 6\Delta - 18} \cdot x^{(2)}$$

$$= -\frac{1}{18} 2^x \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{3\Delta - 2\Delta^2}{9}\right)} \cdot x^{(2)}$$

$$= -\frac{2^x}{18} \cdot \left\{1+\left(\frac{3\Delta-2\Delta^2}{9}\right)\right\}^{-1} \cdot \left(x^{(2)}\right)$$

$$= -\frac{2^x}{18}\left\{1-\left(\frac{3\Delta-2\Delta^2}{9}\right)+\left(\frac{3\Delta-2\Delta^2}{9}\right)^2 \ldots\ldots\right\}\left(x^{(2)}\right)$$

$$= -\frac{2^x}{18}\left\{1-\frac{1}{3}\Delta+\frac{2}{9}\Delta^2+\frac{1}{81}\left(9\Delta^2-12\Delta^3+4\Delta^4\right)\ldots\ldots\right\}\left(x^{(2)}\right)$$

$$= -\frac{2^x}{18}\left\{x^{(2)}-\frac{1}{3}\Delta\left(x^{(2)}\right)+\frac{1}{3}\Delta^2\left(x^{(2)}\right)\right\}$$

$$= -\frac{2^x}{18}\left\{x^{(2)}-\frac{1}{3}\cdot 2x^{(1)}+\frac{2}{3}\right\}$$

($\because \Delta^3\left(x^{(2)}\right)=0$ বলে, পরবর্তী, $\Delta^4\left(x^{(2)}\right)=0$, $\Delta^5\left(x^{(2)}\right)=0$, ইত্যাদি)

$$= -\frac{2^x}{18}\left\{x^{(2)}-\frac{2}{3}x^{(1)}+\frac{2}{3}\right\}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সম্পূর্ণ সমাধান (সাধারণ) হ'ল

$$u_x = A.(-1)^x + B.(8)^x - \frac{2^x}{18}\left\{x^{(2)} - \frac{2}{3}x^{(1)} + \frac{2}{3}\right\}$$

$$=A.(-1)^x + B.(8)^x - \frac{2^x}{18}\left\{x(x-1) - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\right)$$

$$= A.(-1)^x + B.(8)^x - \frac{2^x}{18}\left\{\frac{1}{3}\left(3x^2 - 3x - 2x + 2\right)\right\}$$

$$= A.(-1)^x + B.8^x - \frac{2^x}{54}\left(3x^2 - 5x + 2\right)$$ **(উত্তর)**

উদা. 4. $\Delta^{-1}\left(x^3 + x^2 - x + 2\right)$ নির্ণয় করুন। [উৎপাদকীয় প্রতীকে]

সমাধান : আমরা জানি যে $x^{(1)} = x.....(1)$

$$x^{(2)} = x(x-1) = x^2 - x....(2)$$

$$x^{(3)} = x(x-1)(x-2)$$

$$= x\left(x^2 - 3x + 2\right)$$

$$= x^3 - 3x^2 + 2x....(3)$$

সুতরাং $x^3 + x^2 - x + 2$

$= \left\{x^{(3)} + 3x^2 - 2x\right\} + x^2 - x + 2$ [(3) নং সম্পর্ক থেকে]

$= x^{(3)} + 4x^2 - 3x + 2$

$= x^{(3)} + 4\left(x^2 - x\right) + x + 2$

$= x^{(3)} + 4x^{(2)} + x + 2$ [(2) নং সম্পর্ক থেকে]

$= x^{(3)} + 4x^{(2)} + x^{(1)} + 2.1$ [(1) নং সম্পর্ক থেকে]

$$= x^{(3)} + 4x^{(2)} + x^{(1)} + 2x^{(0)}$$

$$\therefore \Delta^{-1}\left(x^3 + x^2 - x + 2\right) = \Delta^{-1}\left(x^{(3)}\right) + 4\Delta^{-1}\left(x^{(2)}\right) + \Delta^{-1}\left(x^{(1)}\right) + 2\Delta^{-1}\left(x^{(0)}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\cdot x^{(4)} + \frac{4}{3}x^{(3)} + \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{x^{(1)}}{1} + k \;\; (k = \text{ধ্রুবক}) \;\; \left[\because \Delta^{-1}\left(x^{(r)}\right) = \frac{x^{(r+1)}}{r+1}\right.$$

বি.দ্র. (A) কয়েকটি উল্লেখযোগ্য সূত্র ঃ **যথাযথ ক্ষেত্রে, (উৎপাদকীয় প্রতীকে)**

(i) $\Delta^{-1}\left(x^{(n)}\right) = \frac{x^{(n+1)}}{n+1} +$ (ধ্রুবক), [যেখানে $h = 1$]

সাধারণ আকার :

(ii) $\Delta^{-1}\left(x^{(n)}\right) = \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)h} +$ (ধ্রুবক)

সংজ্ঞানুসারে,

(iii) $x^{(-r)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)....(x+r)}$

(iv) $\Delta\left(x^{(-r)}\right) = -rx^{-(r+1)}$

(v) $\Delta^2\left(x^{(-r)}\right) = -r(-r-1)x^{-(r+2)}$

(B) (vi) $\Delta^{-1}\left(a^x\right) = \frac{1}{n-1}a^x\,[a \neq 1]$

(vii) $\Delta^{-1}(\sin ax) = \frac{(-1)}{2\sin\frac{a}{2}}\cos(ax - a/2)$

(viii) $\Delta^{-1}(\cos ax) = \frac{1}{2\sin\left(\frac{a}{2}\right)}\sin\left(ax - \frac{a}{2}\right)$

4.8 বিবিধ উদাহরণমালা

উদা. (1) প্রমাণ করুন যে $\Delta^2 \sin(ax+b) = 4\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)\sin\left\{(ax+b)+2\left(\frac{\pi+a}{2}\right)\right\}$

সমাধান : $\Delta\{\sin(ax+b)\}$

$$= \sin\{a(x+1)+b\} - \sin(ax+b)$$

$$= 2\cos\left(ax+b+\frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{a}{2}\right)\left[\because \sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\right]$$

$$= 2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\sin\left\{(ax+b)+\left(\frac{\pi+a}{2}\right)\right\}....(1)\left[\because \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x\right]$$

$$\therefore \Delta^2\{\sin(ax+b)\} = 2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\Delta\left\{\sin(ax+b)+\left(\frac{\pi+a}{2}\right)\right\}$$

$= 2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\cdot 2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\sin\{(ax+b)+2\cdot\left(\frac{\pi+a}{2}\right)$ [(1) নং সম্পর্ক ব্যবহার করে]

$= 4\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)\cdot\sin\left\{(ax+b)+2\left(\frac{\pi+a}{2}\right)\right\}$ **(প্রমাণিত)**

উদা. (2) মান নির্ণয় করুন : $\frac{1}{E+2}(5x)$ [h = 1 হ'লে]

সমাধান : $\frac{1}{E+2}(5x)$

$$= \frac{1}{(1+\Delta)+2}(5x)$$

$$= \frac{1}{3+\Delta}(5x)$$

$$= \frac{1}{3\left(1+\frac{\Delta}{3}\right)}(5x)$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\left(1+\frac{\Delta}{3}\right)^{-1}\right\}(5x)$$

$$=\frac{1}{3}\left\{1-\frac{\Delta}{3}+\left(\frac{\Delta}{3}\right)^{2}-\frac{\Delta^{3}}{27}+....\right\}(5x)$$

$$=\frac{1}{3}\left\{5x-\frac{1}{3}\cdot\Delta(5x)+\frac{1}{9}\Delta^{2}(5x)-\frac{\Delta^{3}}{27}(5x)+...\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{5x-\frac{5}{3}\cdot 1\right\}\ [\because \Delta^{2}(5x)=0,\quad \Delta^{3}(5x)=0\ \text{ইত্যাদি}]$$

$$=\frac{1}{9}(15x-5)=\frac{5}{9}(3x-1)$$ **(উত্তর)**

উদা. (3) যদি $u_x=cx-3$ [c একটি ধ্রুবক পদ] হয়, দেখান যে $(x-1)u_x-xu_{x-1}-3=0$

সমাধান : এক্ষেত্রে,

$u_x=cx-3$ (প্রদত্ত)

$\therefore u_{x-1}=c(x-1)-3$

বা, $u_{x-1}-c(x-1)+3=0$

বা, $u_{x-1}-(x-1)\left(\frac{u_x+3}{x}\right)+3=0\ \left[\because c=\frac{u_x+3}{x}\right]$

বা, $xu_{x-1}-(x-1)u_x-3(x-1)+3x=0$

বা, $xu_{x-1}-(x-1)u_x-3x+3+3x=0$

বা, $xu_{x-1}-(x-1)u_x+3=0$

বা, $(x-1)u_x-xu_{x-1}-3=0$ এটাই নির্ণেয় ফল।

উদা. 4 যদি $u_1 = 21$ এবং $u_2 = 1$এবং $u_n + 3u_{n-1} - 4u_{n-2} = 0 \; (n \geq 3)$ হয়, দেখান যে $u_n = 17 - (-4)^n$

সমাধান ঃ ধরি $u_n = k^n \, (\neq 0)$, প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

$\therefore u_{n-1} = k^{n-1}$

এবং $u_{n-2} = k^{n-2}$

সুতরাং $k^n + 3k^{n-1} - 4k^{n-2} = 0$

বা, $k^n + \frac{3k^n}{k} - \frac{4k^n}{k^2} = 0$

বা, $k^{n-2}\left(k^2 + 3k - 4\right) = 0$

বা, $k^2 + 3k - 4 = 0 \; \left(\because k^n \neq 0\right)$

বা, $k^2 + 4k - k - 4 = 0$

বা, $k(k+4) - 1(k+4) = 0$ বা, $(k+4)(k-1) = 0$

$\therefore k = 1, -4$

সুতরাং, সাহায্যকারী সমীকরণ থেকে প্রাপ্ত k -এর মান 1 এবং 4 -এর সাহায্যে গঠিত হ'ল

$u_n = \mathrm{A} \cdot (1)^n + \mathrm{B} \cdot (-4)^n$ [যেখানে A ও B দুটি স্বেচ্ছাধীন ধ্রুবক]

বা, $u_n = \mathrm{A} + \mathrm{B}(-4)^n \ldots.(1)$

(1) নং তে $n = 1$ বসিয়ে পাই, $u_1 = \mathrm{A} - 4\mathrm{B}$

(1) নং তে $n = 2$ বসিয়ে পাই, $u_2 = \mathrm{A} + 16\mathrm{B}$

অর্থাৎ A – 4B = 21 এবং A + 16B = 1 $(\because u_1 = 21, u_2 = 1)$

সমাধান করে পাই A = 17 এবং B = – 1.

সুতরাং, $u_n = 17 - (-4)^n$ [(1) নং থেকে]

এটাই নির্ণেয় ফল।

4.9 সংক্ষিপ্তসার

এই এককে পার্থক্যযুক্ত সমীকরণের

- বিভিন্ন রূপ বা আকার আলোচনা করা হয়েছে।
- সমাধান পদ্ধতি দেখানো হয়েছে।

4.10 অনুশীলনী

1. প্রমাণ করুন যে $\Delta^2\left(\frac{1}{x}\right)$ [$h = 1$ হলে] $= \frac{2}{x(x+1)(x+2)}$

2. যদি $f(x)=x^2+2x+2$ হয় তবে দেখান যে $\Delta(f(x))=5$ [যখন $x = 1$ এবং $h = 1$]

3. প্রমাণ করুন যে $\Delta^2 \log_e x = \log_e\left[1-\frac{1}{(x+1)^2}\right]$

4. দেখান যে $\Delta^{-1}\left(x^3+x-7\right)=\frac{x^{(4)}}{4}+x^{(3)}+x^{(2)}-7x^{(1)}$

5. প্রমাণ করুন যে $\frac{1}{\Delta^2-3\Delta+2}\left(x^2\right)=\frac{x^2+3x+5}{2}$

6. সমাধান করুন : $u_{x+2}-3u_{x+1}-4u_x=3^x$

7. প্রমাণ করুন যে $\Delta+\nabla=\frac{\Delta}{\nabla}-\frac{\nabla}{\Delta}$, [$\Delta$ এবং ∇ প্রচলিত অর্থে]

8. দেখান যে $\Delta\left(\frac{x}{x^2-1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}\right)$, ($h = 1$ হ'লে)

9.

x	0	1	2	3	4	5
$y=f(x)$	41	43	47	53	61	71

, পার্থক্য তালিকা প্রস্তুত করে দেখান যে $\Delta^2 f(2)=2$

10. যদি $g(x)=\Delta(f(x))$ (যেখানে $f(x)=9x^2+11x+5$) হয়, তাহলে

$g(x)=\left(3x^3+x^2+x\right)+c$ প্রমাণ করুন।

11. একটি অপেক্ষকের মানের বিন্যাস পদ্ধতি হ'ল :

$f(2)=15, f(3)=10, f(4)=7, f(5)=6, f(6)=7$ এবং $f(7)=10,$

দেখান $f(1)\ =22.$

[**ইঙ্গিত :** $\mathrm{E}(f(1))=f(2); \therefore f(1)=\mathrm{E}^{-1}f(2)=(1+\Delta)^{-1}f(2)$

$\Delta f, \Delta^2 f,$ তালিকার সাহায্যে $f(1)$ এর মান নির্ণয় করুন।]

12. দেখাও যে $\dfrac{\Delta^2\left(x^3\right)}{\mathrm{E}\left(x^3\right)}=\dfrac{6}{(1+x)^2}$

13. যদি $\Delta(g(x))=2x^{(3)}+3x^{(2)}+2x^{(1)}-10$ হয় তবে $g(x)$ নির্ণয় করুন।

14. $u_{x+2}-2u_{x+1}+u_x=3x^3$ হলে, দেখান যে

P·I (বিশেষ সমাকল) $=3\left\{\dfrac{x^{(5)}}{20}+\dfrac{x^{(4)}}{4}+\dfrac{x^{(3)}}{6}\right\}$

15. সমাধান করুন : $u_{x+3}-3u_{x+1}-2u_x=0$

16. সমাধান করুন : $u_{x+2}-8u_{x+1}+15u_x=0$

17. সমাধান করুন : $u_{x+2}+9u_x=0$

18. $u_{x+1}-2u_x=x^2\cdot 2^x$ এর সাধারণ সমাধান নির্ণয় করুন।

19. $u_{x+1}-3u_x=e^{3x}$ হলে দেখান যে সাধারণ সমাধান হবে $u_x=k\cdot 3^x+\dfrac{1}{e^2-3}\cdot e^{2x}$

[যেখানে k একটি ধ্রুবক]

20. (i) $u_{x+2}+u_x=5\cdot 2^x$ হলে প্রমাণ করুন $u_x=\mathrm{C}_1\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)+\mathrm{C}_2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)+2^x,$

[যেখানে C_i (i = 1, 2) ধ্রুবক]

(ii) $u_x - u_{x-1} + 2u_{x-2} = x + 2^x$ হলে দেখান যে

$$u_x = \left(\sqrt{2}\right)^x \left(C_1 \cos\theta x + C_2 \sin\theta x\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right) + 2^x,$$

[যেখানে C_i (i = 1, 2) ধ্রুবক, $\theta = \tan^{-1}\left(\sqrt{7}\right)$]

4.11 গ্রন্থপঞ্জি

- Ranajit Dhar, (2011), Advanced Business Mathematics, Dishari Prakashani
- Mehta and Madnani (2012), Mathematics for Economists, Sultan Chand and Sons
- Sarkhel and Bhukta, (2010), An Introduction to Mathematical Techniques for Economic Analysis, Book Syndicate Private Limited
- Agarwal, (2000), Quantitative Methods, Vrinda Publications Pvt Ltd

একক 5.ক ❑ অবকল সমীকরণ

গঠন

5.ক.1 উদ্দেশ্য

পদার্থবিদ্যা, বলবিদ্যা, রূপান্তর জ্যামিতি এবং গণিতের বিবিধ শাখায় অবকল সমীকরণের ব্যাপক প্রয়োগ পরিলক্ষিত হয়। প্রকৃতি বিজ্ঞানের বহু জটিল সমস্যাকে সমাধান করার জন্য অবকল সমীকরণের সাহায্য নিতে হয়। বিবিধ বৈজ্ঞানিক কার্যাবলিকে সহজতর রূপে প্রকাশ ঘটিয়ে তার সমাধানকে সুবিস্তৃত করার জন্য অবকল সমীকরণের জুড়ি মেলা ভার। এই সমীকরণের তত্ত্ব ও তথ্য ক্রমশই বিভিন্ন ধারায় আজ বিকশিত হচ্ছে। বিজ্ঞান ও প্রযুক্তির সমস্যাকে গাণিতিকভাবে প্রকাশ করে সমাধান যজ্ঞের মূল সঞ্চালকের ভূমিকায় আমরা অবকল সমীকরণের বিবিধ রূপকেই বর্তমানে পরিগ্রহ করে থাকি।

5.ক.2 প্রস্তাবনা

অবকল (differential) অথবা অবকল সহগ (differential co-efficient) চলরাশিসহ ধ্রুবকরাশির উপস্থিতিতে বা অনুপস্থিতিতে যে সমীকরণ গঠিত হয় তাকে **অবকল সমীকরণ** (differential equation) হিসাবে গণ্য করা হয়।

নীচের উদাহরণগুলি আমাদের ধারণাটিকে পরিস্কার করে।

(i) $y\frac{dy}{dx}+(x+2)=0$

(ii) $xdx - ydy = 0$

(iii) $\log_e\left(\frac{dy}{dx}\right) = x$

(iv) $\frac{dy}{dx} = 0$

অবকল সমীকরণকে মূলত: দুটি ভাগে বিভক্ত করা হয়।

যেমন— (i) সাধারণ (ordinary)

(ii) আংশিক (partial) অবকল সমীকরণ।

সাধারণ অবকল সমীকরণ (Ordinary differential equation)

অবকল সমীকরণে উপস্থিত অবকল সমূহ যখন শুধুমাত্র একটি চলকের মাধ্যমে প্রকাশিত হলে, তাকে সাধারণ অবকল সমীকরণ রূপে চিহ্নিত করা হয়।

যেমন : $\frac{dy}{dx} = \cos x.$

আংশিক অবকল সমীকরণ : (Parial differential equation) :

যে অবকল সমীকরণে একের বেশি স্বাধীন চলরাশির অবকল সহগ উপস্থিত থাকে, তাকে আংশিক অবকল সমীকরণ বলা হয়।

যেমন : যদি $F = f(x, y, z)$ হয় তবে $x\frac{\delta f}{\delta x} + y\frac{\delta f}{\delta y} + z\frac{\delta f}{\delta \mathrm{F}} = 0$ একটি আংশিক অবকল সমীকরণের উদাহরণ।

5.ক.3 অবকল সমীকরণের ক্রম এবং মাত্রা

যে-কোনো প্রদত্ত অবকল সমীকরণে উপস্থিত সর্বোচ্চ ক্রমের অবকল সহগটিকে চিহ্নিত করে তার ক্রমকেই অবকল সমীকরণের ‘ক্রম’ রূপে বিবেচনা করতে হবে।

প্রদত্ত যে-কোনো অবকল সমীকরণে উপস্থিত সর্বোচ্চ ক্রমের অবকল সহগের ‘সূচক’ বা ‘শক্তি’ কে অবকল সমীকরণের ‘মাত্রা’ হিসাবে গণ্য করা হয়। নিচের উদাহরণগুলি থেকে আমরা প্রদত্ত অবকল সমীকরণগুলির ক্রম এবং মাত্রা উল্লেখ করতে পারি।

(i) $\frac{dy}{dx}-2x=0$

অবকল সমীকরণের ক্রম = 1 এবং মাত্রা = 1.

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2}-25y=0$

অবকল সমীকরণের ক্রম = 2 এবং মাত্রা = 1

(iii) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2-10=0$

অবকল সমীকরণে ক্রম = 2 এবং মাত্রা = 2

(iv) $\frac{\left(1+\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=3$

এক্ষেত্রে সর্বপ্রথম মূলচিহ্ন বা ভগ্নাংশটিকে বিলুপ্ত করার ব্যবস্থা নিতে হবে। সেজন্য উভয় পক্ষে (প্রদত্ত অবকল সমীকরণটির) বর্গ ক'রে পাই

$$\left(1+\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3=9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

বা, $1+3\frac{d^2y}{dx^2}+3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3-9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=0$

বা, $9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2-3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2-3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)-\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3-1=0$

বা, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3-6\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+1=0$

এখন, অবকল সমীকরণের ক্রম = 2 এবং মাত্রা = 3.

5.ক.4 অবকল সমীকরণ গঠন

মূলবিন্দুগামী একগুচ্ছ সরলরেখার সমীকরণ হ'ল

$y = mx....(\mathrm{i})$ [মূল চলক x ও y এবং প্রচল হ'ল 'm']

(i) নং সমীকরণটির, x সাপেক্ষে অবকলিত রূপ হ'ল $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(mx)$

$$= m\frac{d}{dx}(x)$$

$$= m \cdot 1 = m....(\mathrm{ii})$$

(i) নং তে $m = \frac{dy}{dx}$ বসিয়ে পাই

$y = x\frac{dy}{dx}$ বা $x\frac{dy}{dx} - y = 0.$

এস্থলে, m (প্রচল) কে অপসারিত করে নির্ণেয় অবকল সমীকরণটিকে গঠন করা হ'ল।

5.ক.5 অবকল সমীকরণের ক্ষেত্রে সাধারণ, বিশেষ এবং অনন্য সমাধান

যখন কোনো প্রদত্ত অবকল সমীকরণকে কোনো অবকাশে (interval) সুসংজ্ঞাত $y = g(x)$ অপক্ষেকটি সিদ্ধ করে তখন $y = g(x)$ কে প্রদত্ত অবকল সমীকরণের **সমাধান** হিসাবে গণ্য করা হয়। সমাধান কে ক্ষেত্র বিশেষে তিনটি প্রধান ভাগে বিভক্ত করা যায়।

সাধারণ সমাধান : যে-কোনো প্রদত্ত অবকল সমীকরণের ক্ষেত্রে প্রাপ্ত সমাধানে উপস্থিত স্বাধীন ধ্রুবকের সংখ্যা যখন অবকল সমীকরণটির ক্রমের সঙ্গে সমান হয়, তখন সমাধানটিকে সাধারণ সমাধান (general solution) হিসাবে চিহ্নিত করা হয়।

বিশেষ সমাধান : যে-কোনো প্রদত্ত অবকল সমীকরণের বেলায় প্রাপ্ত সাধারণ সমাধানে উপস্থিত স্বাধীন ধ্রুবকের মান কোন প্রদত্ত বিশেষ প্রকার শর্ত দিয়ে নির্ণয় করা হয়, তখন বিশেষ মানবাহক সমাধানকে অবকল সমীকরণটির একটি বিশেষ সমাধান (particular solution) বলা হয়।

অনন্য সমাধান : যে-কোনো প্রদত্ত অবকল সমীকরণের ক্ষেত্রে, যে সমাধান সাধারণ সমাধান বা বিশেষ সমাধান রূপে বিবেচিত হয় না, তখন ঐ সমাধানকে অনন্য সমাধান (Singular solution) হিসাবে গণ্য করা হয়। অবকল সমীকরণের প্রেক্ষিতে)।

উদা.

ধরি, $y = \mathrm{A}\sin x + \mathrm{B}\cos x.....(1)$

(যেখানে A ও B পরস্পর অনির্ভরশীল স্বাধীন ধ্রুবক)।

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \mathrm{A}\cos x - \mathrm{B}\sin x$$

এবং $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\mathrm{A}\sin x - \mathrm{B}\cos x$

বা, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -(\mathrm{A}\sin x + \mathrm{B}\cos x)$

বা, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -y$

বা, $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0....(2)$ (ইহা একটি দ্বিতীয় ক্রমের, এক মাত্রার অবকল সমীকরণ)।

যেহেতু, (2) নং অবকল সমীকরণের ক্ষেত্রে ক্রম হ'ল দুই এবং (1) নং তে উপস্থিত ধ্রু'বক A ও B এবং সংখ্যা দুই, সুতরাং, (1) নং অর্থাৎ $y = \mathrm{A}\sin x + \mathrm{B}\cos x$ কে (2) নং বা $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ অবকল সমীকরণের **সাধারণ সমাধান** হিসাবে ধরে নিতে পারি।

মনে করি, A = 1 এবং B = 0; তখন (1) নং তে A = 1, B = 0 বসিয়ে পাই, $y = 1.\sin x + 0.\cos x$ বা, $y = \sin x.$

সুতরাং A ও B ধ্রুবক দুটির বিশেষ মানের জন্য $y = \sin x$ সমাধানটিকে (2) নং অবকল সমীকরণটির একটি **বিশেষ সমাধান** হিসাবে বিবেচনা করা যায়।

বি.দ্র. যখন কোন শর্ত আরোপ করে অবকল সমীকরণের বিশেষ সমাধান নির্ণয় করা হয়, তখন ঐ শর্তকে **'প্রাথমিক শর্ত'** বলা হয়। যে সমস্যায় (problem এ) প্রাথমিক শর্তের মাধ্যমে, অবকল সমীকরণের বিশেষ সমাধান স্থির করা হয়, তাকে **প্রাথমিক মানের সমস্যা** (initial value problem) রূপে গণ্য করা হয়।

5.ক.6 কতিপয় উদাহরণ

(1) যদি $y=\frac{\mathrm{A}}{x}+\mathrm{B}x^2$ হয় (যখন A, B উভয়েই স্বেচ্ছাধীন ধ্রুবক), তবে অবকল সমীকরণটি নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ এস্থলে শর্তানুসারে,

$$y=\frac{\mathrm{A}}{x}+\mathrm{B}x^2$$

বা, $xy = \mathrm{A} + \mathrm{B}x^3$

উভয় পক্ষকে x সাপেক্ষে অবকলন (বা ব্যবকলন) করে পাই,

$$x\frac{dy}{dx}+y\frac{d}{dx}(x)=\frac{d}{dx}(\mathrm{A})+\mathrm{B}\frac{d}{dx}\left(x^3\right)$$

বা, $x\frac{dy}{dx}+y\cdot 1=0+\mathrm{B}\cdot 3x^2$

বা, $x\frac{dy}{dx}+y=3\mathrm{B}x^2$ বা, $\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x^2}=3\mathrm{B}$

পুনরায়, উভয়পক্ষকে x সাপেক্ষে অবকলন করে পাই,

$$\frac{1}{x}\frac{d^2y}{dx^2}+\left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x^3}=0$$

বা, $\left(\frac{1}{x}\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x^3}=0$ বা, $\left(\frac{1}{x}\right)\frac{d^2y}{dx^2}+0-\frac{2y}{x^3}=0$

বা, $\left(\frac{1}{x}\right)\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{2y}{x^3}=0$

বা, $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2y=0,$ এটাই নির্ণেয় অবকল সমীকরণ।

(2) কোন সরলরেখা বরাবর গতিশীল একটি পদার্থকণার *t* সময়ে ঐ সরলরেখায় স্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে সরণ *x* হলে, $x=a\cos\sqrt{\mu}t$ [যখন $\mu>0$ (একটি ধ্রুবক)], t সময়ে কণাটির ত্বরণ নির্ণয় করে, অবকল সমীকরণটি উল্লেখ করুন।

সমাধান : শর্তানুসারে, $x = a\cos\sqrt{\mu}t$

পদার্থকণার বেগ $(v) = \frac{dx}{dt}$

$$= -\left(a\sin\sqrt{\mu}t\right)\sqrt{\mu}$$

$$= -a\sqrt{\mu}\sin\sqrt{\mu}t.$$

পদার্থকণার ত্বরণ $(f) = \frac{dv}{dt}$

$$= \left(-a\sqrt{\mu}\right)\frac{d}{dt}\left(\sin\sqrt{\mu}t\right)$$

$$= -a\sqrt{\mu}\left(\cos\sqrt{\mu}t\right)\cdot\sqrt{\mu}$$

$= -\mu\left(a\cos\sqrt{\mu}t\right) = -\mu x,$ এটাই পদার্থকণার ত্বরণ।

বা, $\frac{dv}{dt} + \mu x = 0$ হ'ল নির্ণেয় অবকল সমীকরণ।

(3) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + y = 7x^3$, **অবকল সমীকরণের ক্রম ও মাত্রা নির্ণয় করো।**

সমাধান : এক্ষেত্রে লক্ষণীয় যে প্রদত্ত অবকল সমীকরণে উপস্থিত সর্বোচ্চ ক্রমের অবকল সহগ হ'ল $\frac{d^2y}{dx^2}$ এবং ইহার ঘাতের সূচক হ'ল দুই। সুতরাং প্রদত্ত অবকল সমীকরণের ক্রম এবং মাত্রা উভয়েই হ'ল দুই (2)।

(4) যে সকল বৃত্ত y অক্ষকে মূল বিন্দুতে স্পর্শ করে, তাদের অবকল সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করি, বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাংক = (a, 0), যখন বৃত্তের ব্যাসার্ধ 'a' (একক) এবং উহা y অক্ষকে মূলবিন্দুতে স্পর্শ করেছে।

∴ বৃত্তের সমীকরণটি হ'ল নিম্নরূপ :

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2$$

বা, $x^2-2ax+a^2+y^2-a^2=0$

বা, $x^2+y^2-2ax=0.....(1)$

এক্ষেত্রে আমরা স্বাধীন ধ্রবরাশি a এর জন্য বিভিন্ন বৃত্তের সমীকরণ পাব যখন প্রত্যেক ক্ষেত্রেই বৃত্তটি y অক্ষকে মূলবিন্দু (0, 0) তে স্পর্শ করবে। অবকল সমীকরণটি পাবার জন্য সর্বপ্রথম আমাদের স্বাধীন ধ্রুবক a কে অপসারিত করা প্রয়োজন।

(1) নং সমীকরণের উভয় পক্ষকে x সাপেক্ষে অবকলন করে পাই

$$2x+2y\frac{dy}{dx}-2a\cdot 1=0$$

বা, $2\left(x+y\frac{dy}{dx}-a\right)=0$

বা, $x+y\frac{dy}{dx}-a=0$ (উভয় পক্ষকে ২ দিয়ে ভাগ করে)

বা, $x+y\frac{dy}{dx}=a$

বা, $x+y\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{2x}$ [(1) নং থেকে]

বা, $2x^2+2xy\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$

বা, $2xy\frac{dy}{dx}=y^2-x^2$, এটাই নির্ণেয় অবকল সমীকরণ।

5.ক.7 সংক্ষিপ্তসার

প্রকৃতি বিজ্ঞানের বহু জটিল সমস্যাকে সমাধান করার জন্য অবকল সমীকরণের সাহায্য নিতে হয়। বিজ্ঞান ও প্রযুক্তির সমস্যাকে গাণিতিকভাবে প্রকাশ করে সমাধান যজ্ঞের মূল সঞ্চালকের ভূমিকায় আমরা অবকল সমীকরণের বিধিরূপকেই বর্তমানে পরিগ্রহণ করে থাকি।

5.ক.8 অনুশীলনী

1. প্রদত্ত অবকল সমীকরণে ক্রম (Order) এবং মাত্রা (degree) উল্লেখ করুন।

2. সঠিক উত্তরটি বেছে নিন :

'যে সকল বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দুতে অবস্থিত তাদের অবকল সমীকরণ' হ'ল

(a) $x^2 - dx + y^2 dy = 0$

(b) $xdx + ydy = 0$

(c) $xdx - ydy = 0$

(d) $\frac{dy}{dx} = 2y$

3. প্রদত্ত অবকল সমীকরণটির ক্রম (order) এবং মাত্রা (degree) সঠিকভাবে নির্ণয় করুন :

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \sqrt[4]{x^2 \frac{dy}{dx} + 6}$$

(a) ক্রম = 3, মাত্রা = 2

(b) ক্রম = 2, মাত্রা = 2

(c) ক্রম = 2, মাত্রা = 3

(d) ক্রম = 3, মাত্রা = 4

4. $y = mx + c$ সরলরেখা সমূহের অবকল সমীকরণ স্থির করুন (যখন m এবং c উভয়েই প্যারামিটার (প্রচল))

5. যে সকল অধিবৃত্তের অক্ষ y-অক্ষের সঙেগ সমান্তরাল তাদের অবকল সমীকরণ নির্ধারণ করুন।

6. $y = a \sec x + b \tan x$ থেকে a ও b কে অপসারিত ক'রে অন্তরকল সমীকরণ গঠন করুন।

7. $x\,dy - y\,dx = 0$ কে অবকল সমীকরণকে সূচিত করে তার সমাধানগুলি দেখান।

(a) অধিবৃত্ত-পরিবার (b) বৃত্ত-পরিবার (c) পরাবৃত্ত-পরিবার (d) সরলরেখা পরিবার

8. প্রমাণ করুন যে $V = \frac{A}{r} + B$ (যখন A ও B স্বেচ্ছাধীন ধ্রুবক)

অবকল সমীকরণ $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{r}\frac{dv}{dr} = 0$ -এর সমাধান।

9. যদি $y = \frac{a}{x} + bx^2$ (যখন a ও b স্বেচ্ছাধীন (arbitrary) ধ্রুবক) হয়, তবে $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} =$ কত?

(i) $2y$ (ii) y^2 (iii) y^3 (iv) y^4

10. প্রমাণ করুন যে α ও β এর সমস্ত মানের জন্য $\frac{d^2x}{dt^2}+n^2x=k\sin pt$ **অবকল সমীকরণকে** $x=\alpha\cos(nt+\beta)+\frac{k}{n^2-p^2}\sin pt(n\neq p)$ **সিদ্ধ (satisfy) করে।**

11. যে অবকল সমীকরণের সমাধান হিসাবে $y=e^{-x}(a\sin x+b\cos x)$ **(যেখানে *a* ও *b* স্বেচ্ছাধীন ধ্রু'বক) উপস্থিত, তাকে নির্ণয় করুন।**

12. সঠিক উত্তরটি নির্বাচন করুন :

$$\sqrt[3]{y+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^5$$

অবকল সমীকরণ ক্ষেত্রে

(a) ক্রম = 2, মাত্রা = 5

(b) ক্রম = 2, মাত্রা = 3

(c) ক্রম = 2, মাত্রা = 2

(d) সকল বিবৃতিই (প্রদত্ত) অসত্য

5.ক.9 গ্রন্থপঞ্জি

- Ranajit Dhar, (2011), Advanced Business Mathematics, Dishari Prakashani
- Mehta and Madnani, (2012) Mathematics for Economists, Sultan Chand and Sons
- Sarkhel and Bhukta, (2010), An Introduction to Mathematical Techniques for Economic Analysis, Book Syndicate Private Limited
- Agarwal, (2000), Quantitative Methods, Vrinda Publications Pvt Ltd

একক 5.খ ❑ প্রথম ক্রম ও প্রথম মাত্রাযুক্ত অবকল সমীকরণ

গঠন

5.খ.1 উদ্দেশ্য

প্রথম ক্রম ও প্রথম মাত্রা যুক্ত অবকল সমীকরণটিকে সাধারণভাবে আমরা $\frac{dy}{dx} = \psi(x, y)$ হিসাবে প্রকাশ করি। প্রথম ক্রম ও প্রথম মাত্রা বিশিষ্ট অবকল সমীকরণকে নিম্নোক্ত ভাবে লেখা হয়।

$\mathrm{M}(x, y)\, dx + \mathrm{N}(x, y)\, dy = 0$, সংক্ষেপে, $\mathrm{M}dx + \mathrm{N}\, dy = 0$

(যেখানে M ও N হ'ল x ও y চলযুক্ত অপেক্ষক বা ধ্রুবক)

উপরি উক্ত, অবকল সমীকরণকে প্রাথমিক পর্যায়ে **দুটি উপায়ে** সমাধান করা হয়।

(1) চলরাশি দুটিকে সম্পূর্ণভাবে বিচ্ছিন্ন করে (by the method separation of two variables)

(2) চলরাশির প্রতিস্থাপনের পদ্ধতির দ্বারা (by the method of substitution)

পদ্ধতি দুটিকে যথাযথ উদাহরণ দিয়ে আমরা সুন্দরভাবে এখন তুলে ধরব।

বি.দ্র : মনে রাখতে হবে যে অবকল সমীকরণের সমস্যার সমাধানের প্রথম হাতিয়ার হ'ল **সমাকলন** প্রণালী।

5.খ.2 প্রস্তাবনা

উদা : (1) $\log_e\left(\frac{dy}{dx}\right)=ax+by,$ অবকল সমীকরণটিকে সমাধান করুন।

সমাধান : এস্থলে,

$$\log_e\left(\frac{dy}{dx}\right)=ax+by$$

বা, $\frac{dy}{dx}=e^{ax+by}$

বা, $\frac{dy}{dx}=e^{ax}\cdot e^{by}$

বা, $e^{ax}dx=\frac{dy}{e^{by}}$

বা, $\int e^{ax}dx=\int e^{-by}dy$

বা, $\frac{e^{ax}}{a}=\frac{e^{-by}}{-b}+c$ (স্বেচ্ছাধীন সমাকলন ধ্রুবক)

বা, $\frac{e^{ax}}{a}+\frac{e^{-by}}{b}=c$ এটাই নির্ণেয় সাধারণ সমাধান।

উদা (2) সমাধান করুন :

$$2ydx-xdy=xy^3dy.$$

সমাধান : এ স্থলে,

$$2ydx-xdy=xy^3dy.$$

বা, $2ydx=xdy+xy^3dy$

বা, $\frac{2ydx}{xy}=\frac{x\left(dy+y^3dy\right)}{xy}$

বা, $2\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dy}{y}+\int y^2dy$ [xy দিয়ে উভয় পক্ষকে ভাগ করে পাই,

যখন $x\neq 0,\ y\neq 0.$]

বা, $2\log_e x=\log_e y+\frac{y^3}{3}+c$ (যখন c একটি স্বেচ্ছাধীন ধ্রুবক)

বা, $\log_e x^2=\log_e y+\left(\frac{y^3}{3}+c\right)$

বা, $\frac{x^2}{y}=e^{\left(y^3/3+c\right)}$

বা, $x^2=ye^{\left(y^3/3+c\right)}$, এটাই নির্ণেয় সাধারণ সমাধান।

সমাধান করুন :

উদা. (3) $x^2\left(4+y^2\right)dx+y^2\left(4+x^2\right)dy=0$

সমাধান : এ স্থলে,

$$x^2\left(4+y^2\right)dx+y^2\left(4+x^2\right)dy=0$$

বা, $x^2\left(4+y^2\right)dx=-y^2\left(4+x^2\right)dy$

বা, $\frac{x^2\left(4+y^2\right)dx}{\left(4+x^2\right)\left(4+y^2\right)}=-\frac{y^2\left(4+x^2\right)dy}{\left(4+x^2\right)\left(4+y^2\right)}$

[উভয়পক্ষকে $\left(4+x^2\right)\left(4+y^2\right)$ দিয়ে ভাগ করে পাই,

যখন $4+x^2\neq 0$ এবং $4+y^2\neq 0.$]

বা, $\frac{x^2dx}{4+x^2}=-\frac{y^2dy}{4+y^2}$

বা, $$\int\frac{\left\{\left(4+x^2\right)-4\right\}dx}{\left(4+x^2\right)}=-\int\frac{\left\{\left(4+y^2\right)-4\right\}dy}{\left(4+y^2\right)}$$

বা, $$\int 1.dx-4\int\frac{dx}{x^2+4}=-\int 1.dy+4\int\frac{dy}{y^2+4}$$

বা, $$\int 1dx-4\int\frac{dx}{x^2+2^2}=-\int 1.dy+4\int\frac{dy}{y^2+2^2}$$

বা, $$x-4.\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)=-y+4.\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{y}{2}\right)+c$$

(যেখানে c একটি স্বেচ্ছাধীন ধ্রুবক)

বা, $$x-2\left\{\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{y}{2}\right)\right\}+y=c$$

বা, $(x+y)-2\left(\tan^{-1}\frac{x}{2}+\tan^{-1}\frac{y}{2}\right)=c,$ এটাই নির্ণেয় সাধারণ সমাধান।

উদা. (4) সমাধান করুন :

(i) $\tan x\left(\frac{dy}{dx}\right)=1+y^2,$ যখন $1+y^2\neq 0,\ x\neq 0.$

(ii) উপরি উক্ত অবকল সমীকরণের $x=\frac{\Pi}{2}, y=1$ শর্ত সাপেক্ষে বিশেষ সমাধান (particular solution) নির্ণয় করুন।

সমাধান : (i) এ স্থলে, $\tan x\left(\frac{dy}{dx}\right)=1+y^2$

বা, $$\frac{\tan x\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\tan x\left(1+y^2\right)}=\frac{\left(1+y^2\right)}{\tan x\left(1+y^2\right)}$$

[উভয় পক্ষকে $\tan x\left(1+y^2\right)$ দিয়ে ভাগ করে]

বা, $$\frac{dy}{1+y^2}=\frac{dx}{\tan x}$$

বা, $$\int\frac{dy}{1+y^2}=\int\cot xdx$$

বা, $$\int\frac{dy}{y^2+1^2}=\int\cot xdx$$

বা, $\tan^{-1}(y)=\log_e(\sin x)+c$ (একটি স্বেচ্ছাধীন ধ্রু'বক) এটাই নির্ণেয় সাধারণ সমাধান।

(ii) উপরোক্ত সাধারণ সমাধান থেকে পাই

$$\tan^{-1}(y)=\log_e(\sin x)+c....(1)$$

(1) নং তে, $x=\Pi/2$, $y = 1$ বসিয়ে পাই

$$\tan^{-1}(1)=\log_e\sin^{\left(\frac{\pi}{2}\right)}+c$$

বা, $$\tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)=\log_e 1+c$$

বা, $\frac{\pi}{4}=0+c$ বা, $c=\pi/4.$

(1) নং তে, $c=\frac{\pi}{4}$ বসিয়ে, বিশেষ সমাধান হিসাবে পাই,

$$\tan^{-1}(y)=\log_e(\sin x)+\frac{\pi}{4}$$

5.খ.3 দুটি চলের প্রতিস্থাপন প্রণালী

নীচের উদাহরণ যোগে মূল বিষয়টিকে আমরা উপস্থিত ক'রব। এক্ষেত্রে চলরাশি x ও y -এর পরিবর্তে যে- কোনো তৃতীয় চল যেমন z -কে এনে সমস্যাগুলি সমাধান করা হয়। এস্থলে সমস্যা সমাধানের জন্য প্রথমে চলের 'প্রতিস্থাপন', পরে 'পৃথকীকরণ পদ্ধতি' অবলম্বন করা হয়।

উদা. (1) সমাধান করুন :

$$\sin^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right)=x+y$$

সমাধান : এক্ষেত্রে,

$$\sin^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right)=x+y$$

বা, $$\frac{dy}{dx}=\sin(x+y)....(1)$$

ধরি, $x+y=z$

$$\therefore 1+\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}$$

বা, $$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}-1$$

(1) নং সম্পর্ক থেকে,

$$\frac{dz}{dx}-1=\sin z$$

বা, $$\frac{dz}{dx}=1+\sin z$$

বা, $$\int\frac{dz}{1+\sin z}=\int 1dx$$

বা, $$\int\frac{(1-\sin z)dz}{(1-\sin z)(1+\sin z)}=\int 1dx$$

বা, $$\int\frac{(1-\sin z)dz}{1-\sin^2 z}=\int 1dx$$

বা, $$\int\frac{(1-\sin z)dz}{\cos^2 z}=\int 1dx$$

বা, $\int\left(\frac{1}{\cos^2 z}-\frac{\sin z}{\cos^2 z}\right)dz=\int 1dx$

বা, $\int \sec^2 zdz-\int \sec z\tan zdz=\int 1dx$

বা, $\tan z-\sec z=x+c$ (একটি স্বেচ্ছাধীন ধ্রুবক)

বা, $\tan(x+y)-\sec(x+y)=x+c\ (\because z=x+y)$, এটাই নির্ণেয় সাধারণ সমাধান।

উদা. (2) সমাধান করুন :

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{y-x}.$$

সমাধান : এক্ষেত্রে,

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{y-x}......(1)$$

ধরি, $\sqrt{y-x}=z$

বা, $y-x=z^2$ (উভয়পক্ষের বর্গ নিয়ে)

$\therefore \frac{dy}{dx}-1=2z\frac{dz}{dx}$

বা, $\frac{dy}{dx}=1+2z\frac{dz}{dx}$

(1) নং থেকে, $1+2z\frac{dz}{dx}=z$

বা, $\frac{dz}{dx}=\frac{z-1}{2z}$

বা, $\int dx=\int\left(\frac{2z}{z-1}\right)dz$

বা, $x=\int\frac{2(z-1)+2}{(z-1)}dz$

বা, $x = 2\int 1 \cdot dz + 2\int \frac{dz}{z-1}$

বা, $x = 2z + 2\log_e(z-1) + c$ (একটি স্বেচ্ছাধীন ধ্রুবক)

বা, $\frac{x-c}{2} = z + \log_e(z-1)$

বা, $\frac{x-c}{2} = \sqrt{y-x} + \log_e\left(\sqrt{y-x}-1\right).\left[\because z = \sqrt{y-x}\right]$, এটাই নির্ণেয় সাধারণ সমাধান।

উদা. 3. সমাধান করুন : $\frac{dy}{dx} = \tan\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}$

সমাধান : এক্ষেত্রে,

$$\frac{dy}{dx} = \tan\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} \text{....(i)}$$

ধরি, $\frac{y}{x} = v$

বা, $y = vx$

$\therefore \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

(1) নং থেকে, $v + x\frac{dv}{dx} = \tan v + v$

বা, $x\frac{dv}{dx} = \tan v$

বা, $\int \frac{dv}{\tan v} = \int \frac{dx}{x}$

বা, $\int \cot v dv = \int \frac{dx}{x}$

বা, $\log_e(\sin v) = \log_e x + \log_e c$ (যেখানে c স্বেচ্ছাধীন ধ্রুবক)

বা, $\log_e(\sin v) = \log_e(cx)$

$\therefore\ \sin v = cx$

বা, $\sin\left(\dfrac{y}{x}\right) = cx$, এটাই নির্ণেয় সাধারণ সমাধান।

উদা. 4. সমাধান করুন : $\dfrac{dy}{dx} = (x-y)^6 + 1$; দেওয়া আছে $x = 2$ হলে $y = 1$.

সমাধান : ধরি, $x - y = z$

$$\therefore 1 - \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

বা, $\dfrac{dy}{dx} = 1 - \dfrac{dz}{dx}$.

এক্ষেত্রে, $\dfrac{dy}{dx} = (x-y)^6 + 1 ....(1)$

(1) নং থেকে, $1 - \dfrac{dz}{dx} = z^6 + 1$

বা, $\dfrac{dz}{dx} = -z^6$

বা, $\int \dfrac{dz}{z^6} = -\int dx$

বা, $\int z^{-6} dz = -\int dx$

বা, $-\dfrac{z^{-5}}{5} = -x + c$ (c একটি স্বেচ্ছাধীন ধ্রুবক)

বা, $\dfrac{1}{z^5} = 5x - 5c$

বা, $\dfrac{1}{(x-y)^5} = 5x - 5c....(2)$

(2) নং তে, $x = 2$, $y = 1$ বসিয়ে পাই

$$\frac{1}{(2-1)^5} = 5.1 - 5c$$

বা, $1 = 5 - 5c$

বা, $5c = 4$ বা, $c = 4/5$

$c = 4/5$, (2) নং এ বসিয়ে পাই

$$\frac{1}{(x-y)^5} = 5x - 5\left(\frac{4}{5}\right)$$

বা, $\frac{1}{(x-y)^5} = 5x - 4$, এটাই নির্ণেয় বিশেষ সমাধান।

5.খ.4 সমমাত্রিক বা সমসত্ত্ব অপেক্ষক

দুটি চলরাশি x ও y সম্বলিত অপেক্ষক $f(x, y)$ কে যদি $x^n \psi\left(\frac{y}{x}\right)$ অথবা $y^n \psi\left(\frac{x}{y}\right)$ আকারে প্রকাশ করা যায়, তবেই $f(x, y)$ কে n মাত্রার একটি সমমাত্রিক বা সমসত্ত্ব অপেক্ষক হিসাবে চিহ্নিত করা হয়।

অনেক সময় অপেক্ষকটি সমমাত্রিক কিনা তা দেখার জন্য অনেক ক্ষেত্রে আমরা $f(x, y)$ -এর x কে tx এবং y কে ty দিয়ে প্রতিস্থাপিত করি যেখানে t (> 0) ধ্রুবক। এ স্থলে $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ আকার লাভ ক'রলে, $f(x, y)$ কে n মাত্রার সমমাত্রিক অপেক্ষক রূপে গণ্য করা হয়।

উদাহরণস্বরূপ, ধরি, $f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 - y^2}$, $x \neq y$

$$\therefore f(x, y) = \frac{x^4\left(1 + \frac{y^4}{x^4}\right)}{x^2\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)}$$

$$= x^2 \left(\frac{1+\left(\frac{y}{4}\right)^4}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2} \right)$$

$$= x^2 \psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

$\therefore$ f (x) একটি দ্বিতীয় মাত্রার সমমাত্রিক অপেক্ষক।

অন্যভাবে, $f\left(tx, ty\right) = \dfrac{t^4x^4 + t^4y^4}{t^2x^2 - t^2y^2}$

$$= \frac{t^4\left(x^4 + y^4\right)}{t^2\left(x^2 - y^2\right)}$$

$$= t^2\left(\frac{x^4 + y^4}{x^2 - y^2}\right)$$

$$= t^2 f\left(x, y\right)$$

$\therefore$ $f\left(x, y\right)$ -কে দ্বিতীয় মাত্রার সমমাত্রিক অপেক্ষক বলে।

5.খ.5 প্রথম ক্রম ও প্রথম মাত্রার সমমাত্রিক অবকল সমীকরণ

যদি M (x, y) এবং N (x, y) একই মাত্রার ‘সমমাত্রিক অপেক্ষক’ হিসাবে প্রকাশিত হয়, তবে $Mdx + Ndy = 0$ অবকল সমীকরণটিকে একটি ‘সমমাত্রিক অবকল সমীকরণ’ রূপে অভিহিত করা হয়।

প্রথম ক্রম ও প্রথম মাত্রার অবকল সমীকরণকে সাধারণ ভাবে $\dfrac{dy}{dx} = \psi\left(y/x\right)$ আকারে লেখা হয়।

অবকল সমীকরণ সমাধান কল্পে, $\dfrac{y}{x}$ কে v (চল) দিয়ে সূচিত করা হয়।

উদা. 1

সমাধান করুন :

$$\left(x^2-y^2\right)dy=2xydx$$

সমাধান : এস্থলে, $\left(x^2-y^2\right)dy=2xydx$

বা, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}\ldots.(1)$

স্পষ্টত : এটি একটি সমমাত্রিক অবকল সমীকরণ।

ধরি, $y=vx$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

(1) নং থেকে, $v+x\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{2x\cdot vx}{x^2-(vx)^2}$

বা, $v+x\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{x^2(2v)}{x^2\left(1-v^2\right)}$

বা, $v+x\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{2v}{1-v^2}$

বা, $x\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{2v}{1-v^2}-v$

বা, $x\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{2v-v+v^3}{1-v^2}$

বা, $x\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{v\left(1+v^2\right)}{\left(1-v^2\right)}$

বা, $\int \frac{\left(1-v^2\right)dv}{v\left(1+v^2\right)} = \int \frac{dx}{x}$

বা, $\int \left\{ \frac{\left(1+v^2\right)-2v^2}{v\left(1+v^2\right)} \right\} dv = \int \frac{dx}{x}$

বা, $\int \frac{1}{v} dv - \int \frac{2v}{1+v^2} dv = \int \frac{dx}{x}$

সমাকলনের মাধ্যমে পাই

$\log_e v - \log_e (1+v)^2 = \log_e x + \log_e c$ (‘c’ একটি স্বেচ্ছাধীন ধ্রুবক)

বা, $\log_e \left(\frac{v}{1+v^2} \right) = \log_e (cx)$

$\therefore \frac{v}{1+v^2} = cx$

বা, $\frac{y/x}{1+(y/x)^2} = cx \quad (\because v = y/x)$

বা, $\frac{xy}{x^2+y^2} = cx$

বা, $y = c\left(x^2+y^2\right) \quad (\because x \neq 0)$

ইহাই নির্ণেয় সাধারণ সমাধান।

উদা. 2 সমাধান করুন : $(3x+2y-5)dx + (2x+3y-5)dy = 0$

বা, $\frac{dy}{dx} = -\frac{3x+2y-5}{2x+3y-5}$

সমাধান : এক্ষেত্রে,

$$\frac{dy}{dx}=-\left(\frac{3x+2y-5}{2x+3y-5}\right)....(1)$$

ধরি, $x=x'+h$

এবং $y=y'+k$ যেখানে x', y' দুটি চলরাশি, এবং $h,\ k$ দুটি ধ্রুবক রাশি।

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy'}{dx'}$$

(1) নং থেকে, $\frac{dy'}{dx'}=-\frac{3(x'+h)+2(y'+k)-5}{2(x'+h)+3(y'+k)-5}$

বা, $\frac{dy'}{dx'}=-\left\{\frac{3x'+2y'+(3h+2k-5)}{2x'+3y'+(2h+3k-5)}\right\}....(2)$

ধরি, $3h+2k-5=0$

এবং $2h+3k-5=0$

বজ্রগুণন পদ্ধতিতে সমাধান করে পাই

$$\frac{h}{-10+15}=\frac{k}{-10+15}=\frac{1}{9-4}$$

বা, $\frac{h}{5}=\frac{k}{5}=\frac{1}{5}\ \therefore h=\frac{5}{5},\ \ k=\frac{5}{5}$ বা, $h = 1$ এবং $k = 1$

সুতরাং, এক্ষেত্রে লক্ষণীয় যে, $h = 1$, এবং $k = 1$ -এর জন্য (2) নং সমীকরণটি নিম্নোক্তভাবে প্রকাশিত হয় :

$$\frac{dy'}{dx'}=-\left(\frac{3x'+2y'}{2x'+3y'}\right).......(3)$$

ধরি, $y'=vx'$

$$\therefore \frac{dy'}{dx'}=v+x'\frac{dv}{dx'}$$

সুতরাং, (3) নং থেকে,

$$v + x'\frac{dv}{dx'} = -\left(\frac{3x' + 2vx'}{2x' + 3vx'}\right) \ (\because y' = vx')$$

$$= -\left\{\frac{x'(3 + 2v)}{x'(2 + 3v)}\right\}$$

$$= -\frac{3 + 2v}{2 + 3v}$$

বা, $x'\frac{dv}{dx'} = -\frac{(3 + 2v)}{2 + 3v} - v$

বা, $x'\frac{dv}{dx'} = \frac{-(3 + 2v) - 2v - 3v^2}{2 + 3v}$

বা, $x'\frac{dv}{dx'} = \frac{-3 - 4v - 3v^2}{2 + 3v}$ বা, $\left(\frac{2 + 3v}{3 + 4v + 3v^2}\right)dv = -\frac{dx'}{x'}$

বা, $\frac{dx'}{x'} + \frac{(2 + 3v)dv}{3 + 4v + 3v^2} = 0$

বা, $2\frac{dx'}{x'} + \frac{(4 + 6v)dv}{3v^2 + 4v + 3} = 0$ (উভয় পক্ষকে 2 দিয়ে গুণ করে)

$$2\int\frac{dx'}{x'} = -\int\frac{(4 + dv)dv}{3v^2 + 4v + 3}$$

বা, $2\int\frac{dx'}{x'} = -\int\frac{(6v + 4)dv}{3v^2 + 4v + 3}$

বা, $2\log_e(x') = -\log_e\left(3v^2 + 4v + 3\right) + \log_e c$ (স্বেচ্ছাধীন ধ্রুবক)

বা, $2\log_e(x') = \log_e\left(\frac{c}{3v^2 + 4v + 3}\right)$

বা, $(x')^2 = \frac{c}{3v^2 + 4v + 3}$

বা, $\left(3v^2+4v+3\right)\left(x'\right)^2=c$

বা, $\left\{3\left(\frac{y'}{x'}\right)^2+4\left(\frac{y'}{x'}\right)+3\right\}\left(x'\right)^2=c \quad \left[\because v=\frac{y'}{x'}\right]$

বা, $3\left(y'\right)^2+4x'y'+3\left(x'\right)^2=c$

বা, $3\left(y-1\right)^2+4\left(x-1\right)\left(y-1\right)+3\left(x-1\right)^2=c$

এটাই নির্ণেয় সাধারণ সমাধান। $\left[\because x'=x-1\right.$ এবং $\left. y'=y-1\right]$

বি.দ্র. প্রদত্ত সমস্যা সমাধানে, নীচের উল্লেখ করা ফলগুলি (results) অবশ্যই স্মরণযোগ্য।

(i) $ydx+xdy=d\left(xy\right)$

(ii) $\frac{ydx-xdy}{y^2}=d\left(\frac{x}{y}\right)$

(iii) $\frac{xdy-ydx}{x^2}=d\left(\frac{y}{x}\right)$

(iv) $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=d\left(\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right)$

(v) $\frac{xdy-ydx}{xy}=d\left(\log_e\left(\frac{y}{x}\right)\right)$

(vi) $\left.\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}d\left(\log_e\left(x^2+y^2\right)\right)\right]$

5.খ.6 সংক্ষিপ্তসার

- এই অধ্যায় থেকে আমরা জানতে পারি প্রথম ক্রম ও প্রথম মাত্রাযুক্ত অবকল সমীকরণ।
- এই সমীকরণ কীভাবে সমাধান করা হয়।

5.খ.7 অনুশীলনী

সমাধান করুন :

1. $\left(x^2+y^2\right)=xydx$

2. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2(3x-y)-7}{2x+3y-6}$

3. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=\left(\dfrac{y}{x}\right)^2$

4. $\dfrac{dy}{dx}=e^{3x-5y}$

5. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos\left(\log_e x\right)}{\log_e y}$

6. $x^2\dfrac{dy}{dx}-\left(y^2-5y+6\right)=0.$

7. $x^2\dfrac{dy}{dx}=1-y$

8. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos^2 y}{1+x^2}$ (ধরি, $\cos y\neq 0$)

9. $\dfrac{dy}{dx}-1=e^{x-y}$

10. $\left(1+e^{x/y}\right)dx+e^{x/y}\left(1-x/y\right)dy=0$

11. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y+1}{2(x+y)+1}$

12. $\tan x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=1+y^2$, দেওয়া আছে $y = 1$ যখন $x=\pi/2$

13. সমাধান করুন :

$$x\,dx + y\,dy = -\left(\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}\right).$$

14. $y(1+xy)\,dx + x(1-xy)\,dy = 0$

15. $\left(x^2 = y^2 + 4\right)dx + \left(x^2 - y^2 + 9\right)y\,dy = 0$

[ইঙ্গিত প্রদত্ত অবকল সমীকরণটি নীচের মত সাজান এবং পরে সমাধান করুন।]

$$\left(x^3 + 4x\right)dx + \left(9y - y^3\right)dy + xy\left(ydx + xdy\right) = 0$$

16. $\dfrac{dy}{dx} = -\left(\dfrac{y^2 + y + 1}{x^2 + x + 1}\right)$

17. $\dfrac{dy}{dx} - y\cot x + y^2 \operatorname{cosec} x = 0$

18. $(\cos y + y\cos x)\,dx + (\sin x - x\sin y)\,dy = 0$

[ইঙ্গিত : প্রদত্ত অবকল সমীকরণটিকে নীচের মত সাজান এবং তারপর সমাধান করুন।]

$$(\cos ydx - x\sin ydy) + (y\cos xdx + \sin xdy) = 0]$$

5.খ.8 গ্রন্থপঞ্জি

- Ranajit Dhar, (2011), Advanced Business Mathematics, Dishari Prakashani
- Mehta and Madnani, (2012) Mathematics for Economists, Sultan Chand and Sons
- Sarkhel and Bhukta, (2010), An Introduction to Mathematical Techniques for Economic Analysis, Book Syndicate Private Limited
- Agarwal, (2000), Quantitative Methods, Vrinda Publications Pvt Ltd

একক 6 ❑ বর্ণনামূলক পরিসংখ্যানবিদ্যা / রাশিবিজ্ঞান

গঠন

6.1 উদ্দেশ্য

ল্যাটিন শব্দ 'Statis' থেকে ইংরাজি শব্দ 'Statistics' এর আগমন। শব্দটিকে একবচন এবং বহুবচন উভয়রূপেই বর্ণনা করা যায়। একবচন হিসাবে একে একটি 'শাস্ত্র' হিসাবে ধরা হয়। বহুবচনে শব্দটিকে কোনো বিষয়ে কোনো বিশেষ উদ্দেশ্যে সংকলিত সংখ্যাকেন্দ্রিক তথ্যকে প্রকাশ করা হয়। বাংলায় 'Statistics' কে 'পরিসংখ্যানবিদ্যা" বা 'রাশিবিজ্ঞান' বলার মধ্যে দিয়ে বুঝান হয় যে এই শাস্ত্রে রাশিতথ্য সংগ্রহ করে তাকে সুষ্ঠভাবে পরিবেশন ও বিশ্লেষণের মাধ্যমে বিজ্ঞানসম্মত উপায়ে প্রকাশ করা। দেশের শাসন ব্যবস্থা উপযুক্ত ভাবে পরিচালনার জন্য প্রাচীন কাল থেকে পরিসংখ্যানের গুরুত্ব ছিল অপরিসীম। বর্তমানে সম্ভাবনা তত্বকে আশ্রয় করে ইহা আধুনিক রূপে দেশে বিদেশে ব্যাপকভাবে বিস্তৃত হয়েছে। বর্তমানে এ শাস্ত্রের রূপকার শুধু গণিতবিদ, পদার্থবিদ ও রসায়ন শাস্ত্রবিদরা নন। অর্থনীতিবিদ, শিল্প বাণিজ্য শাখার বিশারদ এমনকি জীববিজ্ঞানীরাও এর ব্যবহারিক প্রয়োগ বহুলাংশে বৃদ্ধি করেছেন। ফলে আজ এই শাস্ত্রটি বিবিধ ধারায় সুচারুভাবে পল্লবিত।

6.2 প্রস্তাবনা

গণিত বা বিজ্ঞানের যে কোন শাখার উদ্ভাবনের প্রেক্ষিতে থাকে আর্থিক ও সামাজিক চাহিদা। রাশিবিজ্ঞানের ক্ষেত্রেও তার ব্যতিক্রম নয়। এখানে চলরাশির বা পরিবর্তনশীল রাশিসমূহকে উপযুক্তভাবে সংগ্রহ ক'রে তালিকাবদ্ধ করা হয়। পরে, গাণিতিক বিশ্লেষণ ও সম্ভাবনা তত্ত্বকে আশ্রয় করে ত্রুটিবিহীন অবস্থায় তার ফলকে যাচাই করার কাজটি সফল করার মধ্যে নিহিত থাকে প্রকৃত উদ্দেশ্য। সামগ্রিক ভাবে এই কাজটি করার জন্য আমরা এখানে কয়েকটি অধ্যায়ের মাধ্যমে কিছুটা আলোকপাত ক'রব। প্রথম ধাপের আলোচনায় থাকবে মধ্যগামিতা ও তার পরিমাপসংক্রান্ত তথ্য। যেমন, যৌগিক গড়, গুণোত্তর গড়, ও বিবর্ত যৌগিক গড়। পরে আসবে পর্যায়ক্রমে মধ্যমা ও সংখ্যা গরিষ্ঠ সংক্রান্ত বিষয়বস্তু এবং তাদের ধর্মাবলি। এর পর স্বাভাবিক ভাবে আসে বিস্তৃতি ও তার মাপক চতুর্থক, দশমক এবং শততমক। প্রমাণ বিচ্যুতি এখানে বড় ভূমিকা নেয়। পরবর্তী ক্ষেত্রে আমরা পাই পরিঘাত, প্রতিবৈষম্য ও তীক্ষ্ণতা এবং এই সম্পর্কিত মাপনের ধারণা। পরিশেষে আবির্ভাব ঘটে সহগতি এবং সহগাঙ্কের মান নির্ণয়ের প্রচলিত পদ্ধতিসমূহ এবং নির্ভরণ -এর সংজ্ঞা, নির্ভরণ সরলরেখার ধারণা এবং নির্ভরণাঙ্ক নির্ণয় করা। সহগাঙ্ক ও নির্ভরণাঙ্কের মধ্যে সম্পর্কটিও আমাদের আলোচনায় রাখতে হয়।

6.3 কেন্দ্রীয় প্রবণতা এবং এর পরিমাপ

এই অধ্যায়ে আমরা কেন্দ্রীয় প্রবণতা ব'লতে কী বুঝায় তা আলোচনা ক'রে তার বিভিন্ন প্রকারভেদ উল্লেখ ক'রব। কীভাবে এদের পরিমাপ করা হয় তার সবিশেষ উল্লেখপর্ব মিটিয়ে বিশিষ্ট ধর্মাবলিও পরিবেশিত হবে।

❑ কেন্দ্রীয় প্রবণতা এবং এর বিবিধ পরিমাপ

পরিসংখ্যা বিভাজনকে সঠিকভাবে লক্ষ করলে চলরাশির সর্বাধিক ও সর্বনিম্ন মানের মাঝামাঝি একটি বিশেষ মানের খুব নিকটে চলরাশির অন্যান্য মানগুলিকে বিরাজ ক'রতে দেখা যায়। এই প্রকার প্রবণতা বা প্রচেষ্টাকেই চলরাশির বা তার পরিসংখ্যা বিভাজনের 'কেন্দ্রীয় প্রবণতা' হিসাবে গণ্য করা হয়। যে গাণিতিক প্রক্রিয়ায় এই ধরনের প্রবণতাকে নির্ধারণ বা নির্ণয় করা হয় তাকেই বলা হয় 'কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ'। নিম্নোক্ত পাঁচ উপায়ে চলের কেন্দ্রীয় প্রবণতা নির্ণয়ের কাজ চলে।

(i) যৌগিক বা গাণিতিক গড় (Arithmetic mean বা A.M.)

(ii) গুণোত্তর গড় (Geometric mean বা G.M.)

(iii) প্রতিগাণিতিক (বা বিবর্ত যৌগিক) গড় (Harmonic mean বা H.M.)

(iv) মধ্যমা বা মধ্যম মান (Median)

☐ গাণিতিক গড়

ধরি, চলরাশি x এর n সংখ্যক বিভিন্ন মান গুলি হ'ল $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, অতএব চল x এর গাণিতিক গড় বা যৌগিক গড় হবে $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}$ বা সংক্ষেপে $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ বা $\frac{\sum x}{n}$.....(1)

বি.দ্র. এক্ষেত্রে, গ্রিক অক্ষর '$\sum$' দ্বারা চলরাশির বিভিন্ন মানগুলির সমষ্টি বা যোগফলকে সূচিত করা হয়।

যৌগিক গড়কে $\overline{x}$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। একে **সরল যৌগিক গড়** (Simple Arithmetic Mean) বলা হয়।

উদাহরণ (1) 1, 3, 5, 7 ও 9 এর যৌগিক গড় নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ এক্ষেত্রে,

$$\text{যৌগিক গড় বা } \overline{x} = \frac{1+3+5+7+9}{5}$$

$$= \frac{25}{5} = 5$$

উত্তর : 5

ভারযুক্ত বা গুরুত্বযুক্ত যৌগিক গড় ঃ

ধরি, চলরাশি x এর n সংখ্যক মান হ'ল $x_1, x_2, ..., x_n$ এবং উহাদের অনুরূপ ভারগুলি (weights) যথাক্রমে $w_1, w_2, ..., w_n$ । সুতরাং এস্থলে যৌগিক গড় $(\overline{x})$ হবে নিম্নরূপ :

$$\overline{x} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + ... + w_n x_n}{w_1 + w_2 + ... + w_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{\sum wx}{\sum w} .....(2)$$

অন্যভাবে, চলরাশি $x_i \left(i = 1, 2, ..., n\right)$ এর অনুরূপ পরিসংখ্যা (frequency) যথাক্রমে f_i (i = 1, 2,..., n) হলে যৌগিক গড় $(\overline{x})$ কে নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা হয়।

$$\overline{x}=\frac{f_1x_1+f_2x_2+....+f_nx_n}{f_1+f_2+....+f_n}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}f_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}f_i}=\frac{\sum fx}{\sum f}....(3)$$

উদা. (2)

চলরাশি (x)	**পরিসংখ্যা (f)**	**$f \times x$**
2	3	3 × 2 = 6
4	5	5 × 4 = 20
6	4	4 × 6 = 24
8	2	2 × 8 = 16
মোট	$\sum f=14$	$\sum fx=66$

$\therefore$ x -এর যৌগিক গড় $\left(\overline{x}\right)=\frac{\sum fx}{\sum f}$

$$=\frac{66}{14}$$

= 4·71 (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত)

উত্তর : 4·71

❑ গাণিতিক বা যৌগিক গড়ের ধর্মাবলি ঃ

(i) কোনো চলরাশির প্রত্যেকটির মান সমান হলে, চলের গাণিতিক গড় ঐ সাধারণ মানটির সমান হবে।

(ii) কোনো চলরাশির গাণিতিক গড় থেকে চলরাশির মানগুলির বিচ্যুতির যোগফল সর্বদাই শূন্য হবে।

(iii) যদি এক R চলরাশির মানের সঙ্গে অপর চলরাশির মানের সরল রৈখিক সম্পর্ক থাকে তবে উহাদের গাণিতিক গড় অনুরূপ সম্পর্ক বজায় রাখবে। অর্থাৎ $y = a + bx$ (যেখানে a ও b ধ্রুবক পদ) হলে $\overline{y}=a+b\overline{x}$ হবে (যেখানে $\overline{x}$ ও $\overline{y}$ যথাক্রমে চলরাশি x ও y এর গড় মানকে নির্দেশ করে।

❑ শ্রেণিবন্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন (সন্তত/অসন্তত) যখন শ্রেণি সীমা এমনকি অসম দৈর্ঘ্যযুক্ত তালিকা থেকে যৌগিক বা গাণিতিক গড় নির্ণয় ঃ

(A) "সরাসরি পদ্ধতি" (Direct method) অবলম্বনে গাণিতিক গড় নির্ণয় করুন ঃ

সূত্র ঃ $\overline{x}$ (গাণিতিক গড়) $=\frac{\sum fx}{\sum f}=\frac{\sum fx}{\mathrm{N}}$ [যখন $\mathrm{N}=\sum f$]

উদা. (1)

শ্রেণি সীমা	শ্রেণি সীমার মধ্যমান (x)	পরিসংখ্যা f	$f \times x$ বা fx
95 – 105	100	20	20 × 100 = 2000
105 – 115	110	26	26 × 110 = 2860
115 – 125	120	38	38 × 120 = 4560
125 – 135	130	16	16 × 130 = 2080
মোট	—	$\sum f=N=100$	$\sum fx=11500$

$$\therefore \text{গাণিতিক গড় } (\overline{x})=\frac{\sum fx}{\mathrm{N}}$$

$$=\frac{11500}{100}=115$$

সুতরাং নির্ণেয় গাণিতিক গড় = 115 **(উত্তর)**

[বি.দ্র. এখানে শ্রেণি সীমা সমদৈর্ঘ্যযুক্ত ও সন্তত। শ্রেণি সীমার সংখ্যা খুব বেশি নয়।]

উদা. (2)

শ্রেণী সীমা	শ্রেণী সীমার মধ্যমান (x)	পরিসংখ্যা f	$f \times x$ বা fx
93 – 97	95	12	12 × 95 = 1140
88 – 92	90	15	15 × 90 = 1350
83 – 87	85	20	20 × 85 = 1700
78 – 82	80	18	18 × 80 = 1440
73 – 77	75	15	15 × 75 = 1125
68 – 72	70	10	10 × 70 = 700
63 – 67	65	8	8 × 65 = 520
মোট	—	$\sum f=\mathrm{N}=98$	$\sum fx=7975$

$\therefore$ গাণিতিক গড় $\left(\overline{x}\right)=\dfrac{\sum fx}{\text{N}}=\dfrac{7975}{98}=81{\cdot}38$ (আসন্ন মানে)

সুতরাং নির্ণেয় গাণিতিক গড় = 81·38 (উত্তর)

[**বি. দ্র.** এক্ষেত্রে শ্রেণি সীমা অসন্তত এবং উহার সংখ্যা খুব বেশী দীর্ঘ নয় কিন্তু সম দৈর্ঘ্যযুক্ত]

(B) (Short cut (method) সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি :

শ্রেণিবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজনে শ্রেণী সীমা অসম দৈর্ঘ্যযুক্ত এবং পরিসংখ্যাগুলি উচ্চতর মান যুক্ত। এক্ষেত্রে কল্পিত গড়ের (assumed mean) সাহায্যে শ্রেণি সীমার মধ্যমান থেকে কল্পিত গড়ের বিচ্যুতি ঘটিয়ে পরিশ্রমকে লঘু করা হয় এবং গাণিতিক গড় নির্ণয় অনেক সহজসাধ্য হয় বলে এই পদ্ধতিকে “Short Cut” (“সংক্ষিপ্ত”) প্রণালী (method) বলে।

উদা. (3)

প্রশ্ন :

শ্রেণি সীমা	পরিসংখ্যা
14 – 15	60
16 – 17	140
18 – 20	150
21 – 24	110
25 – 29	110
30 – 34	100
35 – 39	90

উপরের তালিকা সাপেক্ষে গাণিতিক গড় নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ এক্ষেত্রে পরিসংখ্যা উচ্চ মানের এবং শ্রেণি সীমা অসম দৈর্ঘ্যযুক্ত, সুতরাং “স্বল্প প্রয়াসী” (Short cut) প্রণালী খুবই কার্যকরী হবে গাণিতিক গড় (AM) নির্ণয়ে।

শ্রেণি সীমা	শ্রেণি সীমা সাপেক্ষে মধ্যমান (*x*)	$d = x - \mathrm{A}$	পরিসংখ্যা (*f*)	$f \times d$ বা *fd*
14 – 15	14·5	–8.0	60	60 × (–8) = –480
16 – 17	16·5	–6.0	140	140 × (–6) = –840
18 – 20	19.0	–3·5	150	150 × –3.5) = –535
21 – 24	22·5 = A (ধরি)	0	110	110 × 0 = 0
25 – 29	27.0	4·5	110	110 × 4.5 = 495
30 – 34	32.0	9·5	100	100 × 9.5 = 950
35 – 39	37.0	14·5	90	90 × 14.5 = 1,350
মোট	—	—	$\sum f = \mathrm{N} = 760$	$\sum fd = -1845 + 2750 = 905$

সূত্র ঃ গাণিতিক গড় $(\bar{x}) = \mathrm{A} + \frac{\sum fd}{\mathrm{N}}$

[যেখানে A = কল্পিত গড়,

$\mathrm{N} = \sum f =$ পরিসংখ্যার যোগফল,

এবং (বিচ্যুতি) $d = x - \mathrm{A}$]

উপরি উক্ত সূত্র অবলম্বনে,

নির্ণেয় গাণিতিক গড় $(\bar{x}) = 22{\cdot}5 + \left(\frac{905}{760}\right)$

$= 22{\cdot}5 + 1{\cdot}19$

$= 23{\cdot}69$ (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত) **(উত্তর)**

(C) অতি সংক্ষিপ্ত সংকেত প্রণালী (Coding method) : পরিসংখ্যা বিভাজন ছকে, চলকগুলি দীর্ঘ শ্রেণি সীমাযুক্ত কম দৈর্ঘ্যের এবং উচ্চমানের পরিসংখ্যায় পরিবেশিত হ'লে পূর্বোক্ত পদ্ধতিকে আরও সহজ আকারে প্রকাশ করা হয়। এস্থলে $d' = \frac{d}{c} = \frac{x - \mathrm{A}}{c}$, যখন A = কল্পিত গড় এবং *c* শ্রেণি সীমা বা

সীমান্তের দৈর্ঘ্য (এস্থলে c এর মান পরিসংখ্যা বিভাজন ছকে সর্বত্র সমান থাকে) এই পদ্ধতি খুবই কার্যকরী ভূমিকা নিয়ে থাকে গাণিতিক গড় নির্ণয় কালে। অনেক সময় (B) -এর পদ্ধতিকে প্রকৃত বিচ্যুতি পদ্ধতি' (Actual deviation method) এবং (C) -এর পদ্ধতিকে "Step deviation method" (ধাপ বিচ্যুতি পদ্ধতি') বলে।

সূত্র ঃ গাণিতিক গড় $\left(\bar{x}\right) = \mathrm{A} + \frac{\sum fd'}{\mathrm{N}} \times c$

যেখানে A = কল্পিত গড়

$d' = \frac{d}{c} = \frac{x - \mathrm{A}}{c}$,

$\mathrm{N} = \sum f =$ মোট পরিসংখ্যা

c = শ্রেণি দৈর্ঘ্য।

উদা. (4)

শ্রেণি সীমা	**শ্রেণির মধ্যমান (x)**	**পরিসংখ্যা (f)**	**কল্পিত গড় সাপেক্ষে চ্যুতি $d = (x - \mathrm{A})$**	**সংক্ষিপ্ত চ্যুতি $d' = \frac{(x-A)}{10}$**	**$f \times d'$**
10 – 20	15	7	– 40	– 4	7 × (– 4) = –28
20 – 30	25	15	–30	–3	15 × (–3) = – 45
30 – 40	35	18	–20	–2	18 × (–2) = –36
40 – 50	45	25	–10	–1	25 × (–1) = –25
50 – 60	55 = A	30	0	0	30 × 0 = 0
60 – 70	65	20	10	1	20 × 1 = 20
70 – 80	75	16	20	2	16 × 2 = 32
80 – 90	85	7	30	3	7 × 3 = 21
90 – 100	95	2	40	4	2 × 4 = 8
মোট		$\sum f = \mathrm{N} = 140$			$\sum fd' = -53$

$\therefore$ নির্ণেয় গাণিতিক গড় $\left(\bar{x}\right) = \mathrm{A} + \frac{\sum fd'}{\mathrm{N}} \times \mathrm{C}$

$$= 55 + \left(\frac{-53}{140}\right) \times 10$$

$$= 55 - \frac{53}{14} = 55 - 3{\cdot}78$$ (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত)

$$= 51{\cdot}22$$ [**(উত্তর) :** $51{\cdot}22$]

❑ গুণোত্তর গড়

ধরি, x চলকের n সংখ্যক মান যথাক্রমে $x_1, x_2, ..., x_n \left(x_i > 0, i = 1, 2, ..., n\right)$. এদের গুণোত্তর গড় G হলে, সংজ্ঞানুসারে,

$$\mathrm{G} = \left(x_1.x_2......x_n\right)^{1/n} .....(1)$$

যদি x চলকের $x_i \left(i = 1, 2, ..., n\right)$ ধনাত্মক মানের সঙ্গে অনুরূপভাবে $f_i \left(i = 1, 2, ..., n\right)$ পরিসংখ্যা যুক্ত হয় তবে গুণোত্তর গড় $\left(\mathrm{G}\right) = \left(x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdot ......x_n^{f_n}\right)^{1/n}$ .... (2)

বি.দ্র. স্বল্প সংখ্যক চলকের মানের জন্য আমরা তাদের গুণফলের উপর মূলের মান নির্ধারণ করে গুণোত্তর গড় নির্ণয় করি। কিন্তু অধিক চলের জন্য লগের প্রয়োগ করতে হয়।

এক্ষেত্রে (1) নং থেকে, $\left(\mathrm{G}\right) = \left(x_1 \cdot x_2 \cdot ....x_n\right)^{1/n}$

উভয় পক্ষে লগ্ নিয়ে পাই,

$$\log\left(\mathrm{G}\right) = \frac{1}{n}\left(\log\left(x_1\right) + \log\left(x_2\right) + ... + \log\left(x_n\right)\right)$$

(উভয় দিকে log এর নিধান একই থাকবে।)

$\therefore$ G = এন্টিলগ্ $\left\{\frac{1}{n}\left(\log x_1 + \log x_2 + ... + \log x_n\right)\right\} ...(3)$

পুনরায়, (2) নং থেকে,

$$\mathrm{G} = \left(x_x^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdot ....x_n^{f_n}\right)^{1/n}$$

বা, $\log(\mathrm{G}) = \frac{1}{n}\left(f_1 \log x_1 + f_2 \log x_1 + f_2 \log x_2 + ... + f_n \log x_n\right)$

$\therefore$ G = এন্টিলগ্ $\left\{\frac{1}{n}\left(f_1 \log x_1 + f_2 \log x_2 + ... + f_n \log x_n\right)\right\} .... (4)$

উদা. (1) 2, 4, 16 এবং 32 এর গুণোত্তর গড় (G.M.) নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ এক্ষেত্রে

গুণোত্তর গড় $(\mathrm{G}) = (2\times4\times16\times32)^{\frac{1}{4}}$

$$= \left(2^1 \times 2^2 \times 2^4 \times 2^5\right)^{1/4} = \left(2^{1+2+4+5}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$= \left(2^{12}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{12\times\frac{1}{4}} = 2^3 = 8$$

উত্তর : 8.

উদা. (2)

x	12	13	14	15	16	17
f	5	4	4	3	2	1

উপরি উক্ত তালিকার প্রেক্ষিতে গুণোত্তর গড় নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ এক্ষেত্রে সাধারণ log এর সাহায্যে আমাদের তালিকা প্রস্তুত ক'রতে হবে। $\log_{10} x$ এর প্রাপ্ত মানের জন্য সাধারণ লগের তালিকা দেখতে হবে।

x	f	$\log_{10} x$	$f \times \log_{10} x$
12	5	1·0792	5 × 1·0792 = 5·3960
13	4	1·1139	4 × 1·1139 = 4·4556
14	4	1·1461	4 × 1·1461 = 4.5844
15	3	1·1761	3 × 1·1761 = 3.5283
16	2	1·2041	2 × 1·2041 = 2.4082
17	1	1·2304	1 × 1·2304 = 1.2304
মোট	$n = \sum f = 19$		$\sum f \times \log_{10} x = 21{\cdot}6029$

(4) নং থেকে, G = এন্টিলগ্ (antilog) $\left\{\frac{\sum f\times \log_{10}^{x}}{n}\right\}$

$= $ এন্টিলগ্ $\left\{\frac{21{\cdot}6029}{19}\right\}$

$= $ এন্টিলগ্ $(1{\cdot}137)=13{\cdot}71$ (এন্টিলগের তালিকা অনুসারে)

উ. নির্ণেয় গুণোত্তর গড় = 13·71

❑ গুণোত্তর গড়ের ধর্মাবলি ঃ

(1) যদি $z_i=\frac{x_i}{y_i}(i=1,2,....,n)$ [যখন x_i, y_i, z_i হ'ল ভিন্নভিন্ন চলরাশি] হয় তবে

$G_z=\frac{G_x}{G_y}$ [G_x, G_y এবং G_z হ'ল x_i, y_i, z_i এর গুণোত্তর গড়]

(2) ধরি, x_k (চলক) (k = 1, 2,...., n) দুটি বিভাগে বিভক্ত যেমন $x_k = x_{1i} + x_{2j}$ যেখানে $(i=1,2,....,n_1)$ এবং $(j=1,2,....,n_2)$ অর্থাৎ x_{1i} বিভাগে n_1 সংখ্যক সদস্য এবং x_{2j} বিভাগে n_2 সংখ্যক্ সদস্য বর্তমান।

ধরি, G, G_1 ও G_2 হ'ল x_k, x_{1i} ও x_{2j} চলকদের গুণোত্তর গড়। এখন $G=\left(G_1^{n_1}\times G_2^{n_2}\right)^{1/n}$ হবে (এখানে $n=n_1+n_2$)

❑ প্রতিগাণিতিক বা বিবর্ত যৌগিক গড়

ধরি, x চলরাশির n সংখ্যক ভিন্ন মানগুলি হ'ল $x_1,x_2,....,x_n$। যদি এদের বিবর্ত যৌগিক গড় (H·M) H হয় তবে ইহার অন্যোন্যকের (reciprocal) মান রাশিগুলির অন্যোন্যকের যৌগিক গড়ের (A·M) সঙ্গে সমান হয়।

$$\therefore \frac{1}{H}=\frac{\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+....+\frac{1}{x_n}\right)}{n}$$

বা, $$H=\frac{n}{\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+....+\frac{1}{x_n}\right)}.....(1)$$

যদি x চলকের n সংখ্যক ভিন্ন মানগুলি $x_i\left(i=1,2,....,n\right)$ এবং তাদের অনুরূপ পরিসংখ্যা $f_i\left(i=1,2,...,n\right)$ হলে, এদের বিবর্ত যৌগিক গড় (H) হবে নিম্নরূপ :

$$\frac{1}{\mathrm{H}}=\frac{\left(\frac{f_1}{x_1}+\frac{f_2}{x_2}+....+\frac{f_n}{x_n}\right)}{n}$$

বা, $$\mathrm{H}=\frac{n}{\frac{f_1}{x_1}+\frac{f_2}{x_2}+....+\frac{f_n}{x_n}}$$

$$=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i}{x_i}}.....(2)$$

এখানে, লক্ষণীয় যে $\sum_{i=1}^{n}f_i=n$

উদা. 1 $1,\frac{1}{3},\frac{1}{5},......,\frac{1}{2n-1}$ সংখ্যাগুলির বিবর্ত যৌগিক গড় (HM) নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ এক্ষেত্রে, ধরি সংখ্যাগুলির (প্রদত্ত) বিবর্ত যৌগিক গড় = H

$$\therefore \frac{1}{\mathrm{H}}=\frac{1+3+5+...+(2n-1)}{n}$$ [(1) নং সম্পর্ক থেকে]

$$=\frac{\frac{n}{2}\{1+(2n-1)\}}{n}=\frac{n}{2n}(2n)$$

$$= n$$

সুতরাং, $\mathrm{H}=\frac{1}{n}$

উত্তর : $\frac{1}{n}$

উদা. 2 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ এবং $\frac{1}{4}$ সংখ্যাগুলির পরিসংখ্যা যথাক্রমে 2, 4, 6 এবং 8 হলে বিবর্ত যৌগিক গড় নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরি, প্রদত্ত সংখ্যাগুলির বিবর্ত যৌগিক গড় (HM) হ’ল H.

$$\therefore \frac{1}{H} = \frac{\left(2\times1+4\times\frac{1}{2}+6\times\frac{1}{3}+8\times\frac{1}{4}\right)}{4} \quad [(2) \text{ নং সম্পর্ক থেকে }]$$

$$= \frac{2+2+2+2}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

সুতরাং, $H = \frac{1}{2}$

উত্তর : $\frac{1}{2}$

উদা. 3 একজন লরি চালক সমতলের একটি স্থান থেকে পাহাড়ের একটি স্থানে 30 কিমি/ঘন্টা বেগে যায় এবং 20 কিমি/ঘন্টা বেগে এই পথ ফিরে আসে। লরিটি যাওয়া-আসার কালে যৌগিক গড় বেগ এবং বিবর্ত যৌগিক গড় বেগ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরি, যাতায়াতে লরিটির যৌগিক গড় বেগ = A কিমি/ঘন্টা

$$\therefore A = \frac{30+20}{2} = \frac{50}{2} = 25 \text{ কিমি/ঘন্টা}$$

পুনরায়, ধরি, যাতায়াতে লরিটির বিবর্ত যৌগিক গড় বেগ = H কিমি/ঘন্টা

$$\therefore H = \frac{2}{\frac{1}{30}+\frac{1}{20}} = \frac{2}{\left(\frac{2+3}{60}\right)} = \frac{2}{\left(\frac{5}{60}\right)} = \frac{2}{\left(\frac{1}{12}\right)} = 2\times12$$

= 24 কিমি/ঘন্টা

উত্তর : 25 কিমি/ঘন্টা; 24 কিমি/ঘন্টা।

❑ বিবর্ত যৌগিক গড়ের ধর্মাবলি :

বি.দ্র (i) সাধারণভাবে, যৌগিক গড় (AM), গুণোত্তর গড় (GM) এবং বিবর্ত যৌগিক গড়ের মধ্যে নিম্নলিখিত সম্পর্কটি লক্ষ করা যায়।

$$A.M \geq G.M \geq H.M.....(1)$$

(1) নং এ অসমতা চিহ্ন বজায় থাকে যখন প্রদত্ত চলরাশিসমূহ পরস্পর ভিন্ন মানের হয়।

অপর পক্ষে, (1) নং সমতা চিহ্ন লক্ষিত হবে যদি প্রদত্ত চলরাশিসমূহ পরস্পর সমান মানের হয়ে থাকে।

(ii) দুটি প্রদত্ত সংখ্যার ক্ষেত্রে, $A.M \times H.M = (GM)^2$

❑ মধ্যমা

একজাতীয় প্রদত্ত চলরাশিগুলির কেন্দ্রীয় প্রবণতা মাপকে একটি রাশি হ'ল মধ্যমা। রাশিগুলিকে মানের ক্রম অনুসারে (উর্দ্ধক্রমে বা অধ:ক্রমে) সাজালে ঠিক মধ্যস্থলে যে রাশি অবস্থান করে তাই মধ্যমাকে নির্দেশ করে। সুতরাং মধ্যমা হল রাশি সমূহের ক্রমবিন্যাসকে দুটি সমভাগে ভাগ করার প্রণালী। প্রথম ভাগে অবস্থিত প্রত্যেক রাশি মানের দিক থেকে মধ্যমার মানের কম হবে এবং অপর বিভাগে অবস্থিত রাশির প্রত্যেকটির মান মধ্যমা অপেক্ষা বড় হবে। প্রদত্ত রাশি সমূহের মানগুলি যদি সরলভাবে বিন্যস্ত থাকে তবে তাদের মধ্যমা নিম্নোক্তভাবে নির্ণয় করা হয়।

(A) ধরি, প্রদত্ত রাশিগুলির মোট সংখ্যা = N এবং রাশিগুলিকে মানের উর্দ্ধক্রমে সাজানো হয়েছে। N (অযুগ্ম (odd)) সংখ্যা হলে, $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ -তম স্থানে যে সংখ্যা বিরাজমান তাই হবে মধ্যমা। N যুগ্ম সংখ্যা (even) হলে $\frac{N}{2}$ তম এবং $\left(\frac{N}{2}+1\right)$ -তম স্থানে প্রাপ্ত মান দুটির যৌগিক গড় হবে মধ্যমা অর্থাৎ

এস্থলে মধ্যমা $=\frac{1}{2}$ [$\frac{N}{2}$ -তম পদের মান $+\left(\frac{N}{2}+1\right)$ তম পদের মান]

উদা. 1 1, 2, 4, 3, 6, 5 এর মধ্যমা নির্ণয় করুন।

সমাধান : প্রদত্ত 6টি সংখ্যাকে মানের উর্দ্ধক্রমে সাজালে দাঁড়ায় 1, 2, 3, 4, 5, 6.

সুতরাং N = 6 এবং $\left(\frac{N}{2}+1\right)=4$

এখন $\frac{N}{2}$ তম স্থানে এবং $\left(\frac{N}{2}+1\right)$ -তম স্থানে বিরাজ করছে 6 এবং 4.

∴ নির্ণেয় মধ্যমা $=\frac{1}{2}$ [$\frac{N}{2}$ তম স্থানে বিরাজমান সংখ্যা $+\left(\frac{N}{2}+1\right)$ -তম স্থানে বিরাজমান সংখ্যা]

$=\frac{1}{2}(3+4)=\frac{1}{2}\times 7=3.5$ **(উত্তর)**

উদা. 2 1, 3, 4, 2, 7, 5, 6 সংখ্যার মধ্যমা নির্ণয় করুন।

সমাধান : এক্ষেত্রে প্রদত্ত সংখ্যাগুলিকে মানের উর্দ্ধক্রমে সাজিয়ে পাই

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

এদের মোট সংখ্যা (N) = 7 (একটি অযুগ্ম (odd) সংখ্যা)

প্রদত্ত সংখ্যা গুলির $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ -তম স্থানে অর্থাৎ চতুর্থ স্থানে বিরাজ মান সংখ্যাটি হল 4

সুতরাং নির্ণেয় মধ্যমা = 4 **(উত্তর)**

(B) চলরাশি সমূহের প্রত্যেকটির সঙ্গে নির্দিষ্ট পরিসংখ্যা দেওয়া হলে নিম্নোক্ত উপায়ে মধ্যমা নির্ণয় করা হয়।

x (চলক)	f (পরিসংখ্যা)	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা
1	7	7
2	12	7 + 12 = 19
3	17	19 + 17 = 36
4	19	36 + 19 = ㊺
5	21	55 + 21 = 76
6	24	76 + 24 = 100 = N

এস্থলে N = 100 (যুগ্ম সংখ্যা)

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যমা $= \frac{1}{2}$ [$\frac{N}{2}$ -তম স্থানে বিরাজ মান সংখ্যা $+\left(\frac{N}{2}+1\right)$ -তম স্থানে বিরাজমান সংখ্যা]

$= \frac{1}{2}$ [$\left(\frac{100}{2}\right)$ -তম স্থানে উপস্থিত সংখ্যা $+\left(\frac{100}{2}+1\right)$ -তম স্থানে উপস্থিত সংখ্যা]

$= \frac{1}{2}$ [50 -তম স্থানে উপস্থিত সংখ্যা + 51 -তম স্থানে উপস্থিত সংখ্যা]

$= \frac{1}{2}[4+4]$ [কারণ, 37 -তম স্থান থেকে 55 -তম স্থানে উপস্থিত সকলের জন্য চলরাশির মান হবে 4]

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যমা = 4 **(উত্তর)**

(C) শ্রেণিবন্ধ পরিসংখ্যা বিভাজনের জন্য নিম্নোক্ত সূত্র অবলম্বনে মধ্যমা নির্ণয় করা হয়।

সূত্র : মধ্যমা (M) $= \mathrm{L} + \dfrac{\left(\dfrac{\mathrm{N}}{2} - F\right)}{f_m} \times i$......(1)

এস্থলে, M = নির্ণেয় মধ্যমার মান

N = মোট পরিসংখ্যা

L = যে শ্রেণিতে মধ্যমা বিরাজ করে তার নিম্ন শ্রেণি সীমানা

F = যে শ্রেণিতে মধ্যমা উপস্থিত তার নিচের শ্রেণি সীমার ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (Cummlative frequency)

f_m = যে শ্রেণিতে মধ্যমা উপস্থিত তার নিজস্ব পরিসংখ্যা

i = যে শ্রেণিতে মধ্যমা উপস্থিত তার শ্রেণি দৈর্ঘ্য (length of the class interval)

উদা. মধ্যমা নির্ণয় করুন :

শ্রেণি বিভাগ	**পরিসংখ্যা (f)**	**ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা**
0 – 10	15	15
10 – 30	25	15 + 25 = 40 (F)
30 – 60 (মধ্যমা শ্রেণি)	$f_m = 30$	40 + 30 = 70
60 – 70	4	70 + 4 = 74
70 – 90	10	74 + 10 = 84
মোট	$\sum f = \mathrm{N} = 84$	—

এস্থলে, $\dfrac{\mathrm{N}}{2} = \dfrac{84}{2} = 42$

সুতরাং মধ্যমা যে শ্রেণিতে অবস্থিত তা হ'ল (30 – 60)

[কারণ, $\dfrac{\mathrm{N}}{2} = 42$, ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার প্রেক্ষিতে ইহাকে মধ্যমা শ্রেণি (median-class) হিসাবে চিহ্নিত করে]

$\therefore$ মধ্যমা (M) $= 30 + \left(\dfrac{42-40}{30}\right) \times 30$ [(1) নং সূত্র অনুসারে]

$= 30 + \dfrac{2}{30} \times 30 = 30 + 2 = 32$ **(উত্তর)**

উদা. 2

শ্রেণি বিস্তার (Class interval)	**শ্রেণি সীমানা (Class boundaries)**	**(frequency) পরিসংখ্যা (*f*)**	**ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (Cum. frequency)**
10 – 19	9·5 – 19·5	7	7
20 – 29	19·5 – 29·5	15	7 + 15 = 22
30 – 39	29·5 – 39·5	18	22 + 18 = 40
40 – 49	39·5 – 49·5	25	40 + 25 = 65 (F)
50 – 59	49·5 – 59·5 (মধ্যমা শ্রেণি)	30	65 + 30 = 95
60 – 69	59·5 – 69·5	20	95 + 20 = 115
70 – 79	69·5 – 79·5	16	115 + 16 = 131
80 – 89	79·5 – 89·5	7	131 + 7 = 138
90 – 99	89·5 – 99·5	2	138 + 2 = 140
মোট	—	$\sum f = \mathrm{N} = 140$	—

এক্ষেত্রে, $\frac{\mathrm{N}}{2} = \frac{140}{2} = 70$

ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার পরিপ্রেক্ষিতে 70 $\left(= \frac{\mathrm{N}}{2}\right)$ যে মধ্যমা শ্রেণি সীমানায় অবস্থিত তা হ'ল (49·5 – 59·5)

$$\therefore \text{ মধ্যমা (M) } = 49{\cdot}5 + \left(\frac{70-65}{30}\right)\times 10 \quad [(1) \text{ নং সূত্র থেকে }]$$

$$= 49{\cdot}5 + \frac{5}{30}\times 10$$

$$= 49{\cdot}5 + \frac{5}{3} = 49{\cdot}5 + 1{\cdot}67 \text{ (আসন্ন মান)}$$

$$= 51{\cdot}17$$

∴ নির্ণেয় মধ্যমা = 51·17 **(উত্তর)**

❑ সংখ্যাগুরু মান বা Mode

সরল রাশিতথ্যবিন্যাসে, একজাতীয় কোনো চলকের ক্ষেত্রে যে মান বেশিবার পাওয়া যায় তাকেই সংখ্যাগুরু মান হিসাবে গণ্য করা হয়। সংখ্যাগুরুমান রাশিতথ্যমালায় এক বা একাধিক হতে পারে। বিশেষ ক্ষেত্রে ইহা অনুপস্থিত থেকে যায়। সরল পরিসংখ্যা বিভাজন ছাড়া সমদৈর্ঘ্যসম্পন্ন শ্রেণিবন্ধ পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে সূত্র প্রয়োগে ইহাকে (mode কে) নির্ণয় করা হয়। নিচের উদাহরণগুলি এই আলোচনাকে আরও সমৃদ্ধ করবে।

1, 2, 3, 4, 4, 6, 7 সংখ্যাগুলির জন্য সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ প্রদত্ত 7 টি সংখ্যা সরল শ্রেণিতে অবস্থিত। এক্ষেত্রে 4 সংখ্যাটি বেশি বার অর্থাৎ 2 বার উপস্থিত। সুতরাং প্রদত্ত সংখ্যাগুলির জন্য এক সংখ্যাগুরু মান (unimodal) যুক্ত সংখ্যা হ'ল 4.

∴ নির্ণেয় সংখ্যাগুরু মান = 4 **(উত্তর)**

উদা. (2) 1, 3, 4, 7, 9, 11 সংখ্যা গুলির জন্য সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ এক্ষেত্রে প্রদত্ত সংখ্যাগুলির ক্ষেত্রে কোনো একটি সংখ্যা একাধিক বার উপস্থিত নেই। সেই কারণে, এস্থলে প্রদত্ত সংখ্যাগুলির প্রেক্ষিতে কোনো সংখ্যাগুরু মান পাওয়া সম্ভব হ'ল না।

উত্তর : এক্ষেত্রে সংখ্যাগুরু মান অনুপস্থিত।

উদা. (3) 3, 4, 4, 5, 8, 6, 6, 7 সংখ্যাগুলির জন্য সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ প্রদত্ত 8টি সংখ্যার জন্য লক্ষণীয় 4 এবং 6 উভয়েই একাধিক বার (2 বার করে) উপস্থিত।

সুতরাং, এক্ষেত্রে সংখ্যাগুরু মান দুটি অর্থাৎ 4 ও 6.

∴ নির্ণেয় সংখ্যাগুরু মান 4 এবং 6.

শ্রেণিবন্ধ **সমদৈর্ঘ্যযুক্ত শ্রেণি বিভাগের** পরিসংখ্যা বিভাজনে নীচের সূত্রানুসারে সংখ্যাগুরু মান (mode) নির্ণয় করা হয়।

সূত্র : সংখ্যাগুরু মান (m) $= L + \dfrac{f_m - f_1}{2f_m - (f_1 + f_2)} \times i$

এক্ষেত্রে L = সংখ্যাগুরু মান যে শ্রেণিতে উপস্থিত তার নিম্ন শ্রেণি সীমানা

f_m = সংখ্যাগুরু মান যে শ্রেণিতে বিরাজ করে তার পরিসংখ্যা

f_1 = সংখ্যাগুরু মান যে শ্রেণির অন্তর্গত তার ঠিক পূর্ববর্তী শ্রেণি বিভাগের পরিসংখ্যা

f_2 = সংখ্যাগুরু মান যে শ্রেণি বিভাগে অন্তর্গত তার ঠিক পরবর্তী শ্রেণি বিভাগের পরিসংখ্যা

i = শ্রেণিদৈর্ঘ্য [লক্ষণীয় এস্থলে প্রত্যেক শ্রেণি বিভাগই সমদৈর্ঘ্য যুক্ত]

উদা. সংখ্যাগুরুমান (mode) নির্ণয় করুন।

শ্রেণি	**শ্রেণি সীমানা**	**পরিসংখ্যা (f)**
50 – 59	49·5 – 59·5	5
60 – 69	59·5 – 69·5	20
70 – 79	69·5 – 79·5	40 (f_1)
80 – 89	79·5 – 89·5 (সংখ্যাগুরু মান শ্রেণি)	50 (f_m)
90 – 99	89·5 – 99·5	30 (f_2)
100 – 109	99·5 – 109·5	6

এক্ষেত্রে, সর্বাধিক পরিসংখ্যা = 50

সুতরাং সংখ্যাগুরু মান যে শ্রেণি সীমানায় অবস্থিত তা হ'ল (79·5 – 89·5)

$\therefore$ সংখ্যাগুরু মান (m) $= \mathrm{L} + \dfrac{f_m - f_1}{2f_m - (f_1 + f_2)} \times i$ [(1) নং সূত্রানুসারে]

$$= 79{\cdot}5 + \left\{\frac{50-40}{(2\times 50)-(40+30)}\right\} \times 10$$

$$= 79{\cdot}5 + \left(\frac{10}{100-70}\right) \times 10$$

$$= 79{\cdot}5 + \frac{10\times 10}{30}$$

$$= 79{\cdot}5 + \frac{10}{3}$$

$= 79{\cdot}5 + 3{\cdot}33$ (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত)

= 82·83

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাগুরু মান = 82·83 **(উত্তর)**

বি.দ্র. শ্রেণি বিভাগ **সমদৈর্ঘ্যসম্পন্ন না হলে** (1) নং সূত্র প্রয়োগ করা যায় না। সেক্ষেত্রে, সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় কালে নীচের সূত্র প্রয়োগ করা হয়।

যৌগিক গড় (AM) – সংখাগুরু মান (mode) = 3 (যৌগিক গড় – মধ্যমা (median))

❑ চতুর্থক

যদি চলরাশি x এর n সংখ্যক মান $x_1, x_2, ..., x_n$ -কে মানের উর্ধ্বক্রমে সাজিয়ে সমান চার (4) টি অংশে বিভাজিত করি তবে অন্ত: বিভাজক বিন্দু হিসাবে চলকের তিনটি মান পাব। প্রথম বিভাজিত বিন্দুটি Q_1 কে প্রথম চতুর্থক (1st quartile)। দ্বিতীয় বিভাজিত বিন্দুটি Q_2 -কে দ্বিতীয় চতুর্থক (2nd quartile) এবং তৃতীয় বিভাজিত বিন্দু Q_3 -কে তৃতীয় চতুর্থক (third quartile) বলা হয়। প্রসঙ্গত একথা সহজেই অনুমান করা যায় দ্বিতীয় চতুর্থক (Q_2) হ'ল মধ্যমা (median)। এর বামদিকে প্রথম চতুর্থক (Q_1) এবং ডানদিকে তৃতীয় চতুর্থক (Q_3) অবস্থিত। n মান যুক্ত চলকটি সমান চারটি অংশে বিভক্ত হয়েছে। তাই এদের নামের সঙ্গে চতুর্থক (quartile) শব্দটি যুক্ত।

চতুর্থক নির্ণয় করার পদ্ধতি :

চলরাশির n সংখ্যক মান $x_1, x_2, ..., x_n$ -কে মানের উর্ধ্বক্রমে সাজিয়ে নিতে হবে। তার পর নিম্নোক্ত উপায়ে Q_1, Q_2 এবং Q_3 নির্ণয় ক'রব।

(i) প্রথম চতুর্থক (Q_1) নিম্নতর চতুর্থক (lower quartile) = চলের $\left(\frac{n+1}{4}\right)$-তম স্থানের মানটি [যখন n (বিজোড় সংখ্যা)]

= চলের $\left(\frac{n}{4}\right)$-তম স্থানের মানটি [যখন, n (জোড় সংখ্যা)]

(ii) দ্বিতীয় চতুর্থক (Q_2) (বা মধ্যমা) = চলের $\left(\frac{n+1}{2}\right)$-তম স্থানের মানটি [যখন, n (বিজোড় সংখ্যা]

$=\frac{1}{2}$ [চলের $\left\{\left(\frac{n}{2}\right)\right.$-তম স্থানের মান $+\left(\frac{n}{2}+1\right)$-তম স্থানের মান$\}$], [যখন n (জোড় সংখ্যা)]

(iii) তৃতীয় চতুর্থক (Q_3) বা উচ্চতর চতুর্থক (upper quartile) = চলের $\left\{\frac{3}{4}(n+1)\right\}$-তম স্থানর মান, [যখন n (বিজোড় সংখ্যা)]

= চলের $\left\{\frac{3}{4}(n)\right\}$-তম স্থানের মান [যখন n (জোড় সংখ্যা)]

উপরের বর্ণিত প্রণালী অণুসরণ ক'রব যখন চলরাশির n সংখ্যক মান উর্ধ্বক্রমে বিন্যস্ত। নীচের উদাহরণ থেকে আমাদের ধারণাটি পরিস্কার হবে।

উদা. (1) 96, 88, 24, 28, 32, 40, 48, 56, 76, 80, 68 তথ্যরাশিগুলির সাপেক্ষে প্রথম ও তৃতীয় চতুর্থক [অর্থাৎ Q_1 এবং Q_3] নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ প্রদত্ত মোট 11 টি তথ্য রাশিকে মানের উর্দ্ধক্রমে সাজালে পাই,

24, 28, 32, 40, 48, 56, 68, 76, 80, 88, 96.....(1)

এক্ষেত্রে, প্রথম চতুর্থক (Q_1)

= চলের $\left(\frac{n+1}{4}\right)$-তম স্থানাধিকারী মান [লক্ষণীয় যে n = 11 (বিজোড় সংখ্যা)]

= চলের $\left(\frac{11+1}{4}\right)$-তম স্থানাধিকারী মান

= চলের $\left(\frac{12}{4}\right)$-তম স্থানাধিকারী মান

= চলের তৃতীয় স্থানের মান [(1) নং থেকে]

= 32

তৃতীয় চতুর্থক (Q_3) = চলের $\left\{\frac{3}{4}(n+1)\right\}$ -তম স্থানের মান

= চলের $\left\{\frac{3}{4}(11+1)\right\}$ -তম স্থানের মান

= চলের নবম স্থানে অবস্থিত মান

= 80

উত্তর : $Q_1 = 32$ এবং $Q_3 = 80$.

কিন্তু, চলরাশি সমূহের মানের সঙ্গে পরিসংখ্যা যুক্ত হলে অথবা শ্রেণিবন্ধ চলের শ্রেণিবিভাগের সঙ্গে পরিসংখ্যা যুক্ত হলে প্রথম ও তৃতীয় চতুর্থক নির্ণয় করার ক্ষেত্রে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার একটি গুরুত্ব পূর্ণ ভূমিকা থাকে। এস্থলে, মধ্যমা (দ্বিতীয় চতুর্থক) নির্ণয়ের সূত্রটিকে অনুসরণ করা হয় চলের শ্রেণিবন্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে প্রথম ও তৃতীয় চতুর্থক নির্ণয়ের জন্য। নিম্নোক্ত উদাহরণগুলি থেকে এই ধরনের সমস্যাকে সমাধান করা যাবে।

উদা. (2) নীচের প্রদত্ত তালিকা থেকে প্রথম ও তৃতীয় চতুর্থক অর্থাৎ Q_1 এবং Q_3 নির্ণয় করুন।

চলরাশি (x)	**পরিসংখ্যা (f)**	**ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা**
10	6	6
15	17	23

20	29	52
25	38	90
30	25	115
35	14	129
40	9	138
90	1	139

এস্থলে $\sum f = n = 139$

$\therefore$ প্রথম চতুর্থক (Q_1) = চলের $\left(\frac{n+1}{4}\right)$-তম স্থানাধিকারী মান

= চলের $\left(\frac{139+1}{4}\right)$-তম স্থানের মান

= চলের $\left(\frac{140}{4}\right)$-তম স্থানের মান

= চলের 35-তম স্থানের মান

= 20 [ক্রমযৌগিক সারণি অনুসারে]

$\therefore Q_1 = 20$

অনুরূপে, তৃতীয় চতুর্থক (Q_3) = চলের $\left\{\frac{3}{4}(n+1)\right\}$-তম স্থানের মান

= চলের $\left\{\frac{3}{4}(139+1)\right\}$-তম স্থানের মান

= চলের $\left\{\frac{3}{4}\times 140\right\}$-তম স্থানের মান

= চলের 105-তম স্থানের মান (ক্রমযৌগিক সারণি অনুসারে)

= 30

$\therefore Q_3 = 30$

সুতরাং, নির্ণেয় প্রথম চতুর্থক = 20

এবং তৃতীয় চতুর্থক = 30 **(উত্তর)**

উদা. (3) চলের সন্তত মানের শ্রেণিবিভাগ থেকে :

প্রদত্ত তালিকা অনুসারে প্রথম চতুর্থক (Q_1) এবং তৃতীয় চতুর্থক (Q_3) নির্ণয় করুন।

সমাধান :

	শ্রেণি (চলকের)	**পরিসংখ্যা**	**ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা**
	4 – 8	6	6
	8 – 12	10	6 + 10 = ⑯ (F)
Q_1	12 – 16	$\boxed{18}$	16 + 18 = 34
	16 – 20	30	34 + 30 = 64
	20 – 24	15	64 + 15 = (79) (F)
Q_3	24 – 28	$\boxed{12}$	79 + 12 = 91
	28 – 32	10	91 + 10 = 101
	32 – 36	6	101 + 6 = 107
	36 – 40	2	107 + 2 = 109

এস্থলে, $n=\sum f=109$

প্রথম চতুর্থক (Q_1) = চলের $\left(\frac{n}{4}\right)$-তম স্থান সূচক মান

= চলের $\left(\frac{109}{4}\right)$-তম স্থান সূচক মান

= চলের 27·25-তম স্থান সূচক মান

এক্ষেত্রে লক্ষণীয়, Q_1 (প্রথম চতুর্থক) ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা তালিকা অনুসারে (12 – 16) শ্রেণির অন্তর্গত।

$$\therefore Q_1=12+\frac{27{\cdot}25-16}{18}\times 4$$

[সূত্র : $Q_1=L+\frac{\frac{n}{4}-F}{f_m}\times i$

(C) -এর (1) নং সূত্রে $\frac{N}{2}$ প্রতিস্থাপিত হবে $\frac{N}{4}$ দিয়ে]

$$=12+\frac{(11{\cdot}25)\times 2}{9}$$

$$=12+(1{\cdot}25\times 2)$$

$$= 12 + 2{\cdot}50$$

$$= 14{\cdot}50$$

অনুরূপে,

Q_3 = চলের $3\left(\frac{n}{4}\right)$ -তম স্থানের মান

= চলের $\left(\frac{3\times109}{4}\right)$-তম স্থানের মান

= চলের $\left(\frac{327}{4}\right)$-তম স্থানের মান

= চলের 81·75-তম স্থানের মান

ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা তালিকা অনুসারে, Q_3 এস্থলে (24 – 28) শ্রেণিতে অবস্থিত।

সুতরাং

$Q_3 = 24+\frac{81{\cdot}75-79}{12}\times4$ [(C) এর (1) নং সূত্রে $\frac{N}{2}$ -এর জায়গায় বসবে $\frac{3N}{4}$]

$=24+\frac{2{\cdot}75\times4}{12}$

= 24·92

∴ নির্ণেয় প্রথম চতুর্থক = 14·50

এবং তৃতীয় চতুর্থক = 24·92 **(উত্তর)**

❑ **দশমক ঃ** চতুর্থকের মতই চলরাশির মানসমূহের উর্দ্ধক্রম শৃঙ্খলকে এক্ষেত্রে সমান 10টি সমানভাগে বিভক্ত করা (chain) হয়। চলকের সামগ্রিক বিভাজনে অন্তর্বর্তী 9 টি স্থানে দশমকগুলি অবস্থান করে। এইজাতীয় ভগ্নাংশক (fractile) হ'ল চলের বিভাজনের উত্তম মাপক। চলের সমগ্র বিভাজনের অন্ত:স্থ 9টি বিন্দুজ্ঞাপক স্থানকে $D_1, D_2, D_3,\ldots, D_9$ -এর মাধ্যমে সূচিত করা হয়। চলের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকে, 'মধ্যমা সূত্রে' [(C) এর (1) নং সূত্র স্থলে] $\frac{N}{2}$ এর স্থলে [$\frac{N}{10}$ লিখলে D_1] এবং $\frac{N}{2}$ -এর স্থলে $2\left(\frac{N}{10}\right)$ লিখতে হবে, তবেই D_2 পাওয়া যাবে। এইভাবে D_9 এর ক্ষেত্রে $\frac{N}{2}$ প্রতিস্থাপিত হবে $9\left(\frac{N}{10}\right)$ দিয়ে। উপরিউক্ত 'মধ্যমা সূত্র' থেকেই $D_1, D_2,\ldots, D_9$ সহজেই পাওয়া যাবে। নীচের উদাহরণটি থেকে আমাদের ধারণাটি পরিস্কার হবে।

উদা. (4) নীচের চলকের পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে D_4 এবং D_8 নির্ণয় করুন।

চলকের শ্রেণি (Class interval)	**শ্রেণি সীমানা (Class boundaries)**	**(frequency) পরিসংখ্যা (f)**	**ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা ($c{\cdot}f$) (Cum. frequency)**
50 – 59	49·5 – 59·5	8	8
60 – 69	59·5 – 69·5	10	8 + 10 = ⑱(F)
70 – 79	69·5 – 79·5	$\boxed{16}$	18 + 16 = 34
80 – 89	79·5 – 89·5	14	34 + 14 = ㊽(F)
90 – 99	89·5 – 99·5	$\boxed{10}$	48 + 10 = 58
100 – 109	99·5 – 109·5	5	58 + 5 = 63
110 – 119	109·5 – 119·5	2	63 + 2 = 65

এক্ষেত্রে, $N = \sum f = 65$

D_4 (চতুর্থ দশমক) = চলের $\left(\frac{4N}{10}\right)$-তম স্থানের মান

= চলের $\left(\frac{4\times 65}{10}\right)$-তম স্থানের মান

= চলের $(4\times 6{\cdot}5)$-তম স্থানের মান

= চলের 26 -তম স্থানের মান

সুতরাং, D_4, ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা তালিকা অনুসারে (70 – 79) শ্রেণি বিভাগের অন্তর্গত।

$$\therefore D_4 = 69{\cdot}5 + \frac{26-18}{16}\times 10$$

$$= 69{\cdot}5 + \left(\frac{8}{16}\times 10\right)$$

$$= 69{\cdot}5 + 5 = 74{\cdot}5$$

[(C) বিভাগে (1) নং মধ্যমা সূত্রে $\frac{N}{2}$ প্রতিস্থাপিত, হবে $\frac{4N}{10}$ এর মাধ্যমে]

অনুরূপে, D_8 (অষ্টম দশমক) = চলের $\left(\frac{8N}{10}\right)$-তম স্থানের মান

$$= \text{চলের } \left(\frac{8\times 65}{10}\right)\text{-তম স্থানের মান}$$

$$= \text{চলের } \left(8\times 6{\cdot}5\right)\text{-তম স্থানের মান}$$

= চলের 52-তম স্থানের মান

এস্থলে, D_8 [(ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা) তালিকা অনুসারে]

(90 – 99) শ্রেণি বিভাগে অবস্থিত।

$\therefore D_8 = 89{\cdot}5 + \left(\frac{52-48}{10}\right)\times 10$ [(C) বিভাগে (1) নং

$= 89{\cdot}5 + \left(\frac{4}{10}\right)\times 10 = 89{\cdot}5 + 4$ সূত্রে $\frac{N}{2}$ প্রতিস্থাপিত হয়েছে $\frac{8N}{10}$ -এর মাধ্যমে]

$= 93{\cdot}5$

$\therefore$ নির্ণেয় $D_4 = 74{\cdot}5$ এবং $D_8 = 93{\cdot}5$ **(উত্তর)**

❑ **শততমক ঃ** চলরাশি সমূহের মানগুলি উর্দ্ধক্রমে সাজিয়ে তাদের সমান 100 টি ভাগে বিভক্ত করলে প্রত্যেক মাপক বিন্দুতে চলকের যে মান পাওয়া যায় তাকেই ‘শততমক’ (Percentile) হিসাবে গণ্য করা হয়। প্রথম, দ্বিতীয়,...নিরানব্বইতম মানকে P_1, P_2,....P_{99} হিসাবে চিহ্নিত করা হয়। অর্থাৎ শ্রেণিবন্ধ চলরাশির পরিসংখ্যা বিভাজক ছকে, আমরা P_1 এর ক্ষেত্রে $\frac{N}{100}$, P_2 এর ক্ষেত্রে $\frac{2N}{100}, \frac{2N}{100}, \cdots$, P_{99} -এর ক্ষেত্রে $\frac{99N}{100}$, লিখতে পারি যেখানে চলকের মোট পরিসংখ্যা = N. নিচের উদাহরণযোগে ব্যাপারটি আমরা বিস্তারিত ভাবে ব্যাখ্যা করব। চতুর্থকের নির্ণয় প্রণালী অনুসরণ করেই যেমন ‘দশমক’ নির্ণয় করা হয়, তেমনি একইভাবে ‘শততমক’ও নির্ণীত হয়।

নিম্নোক্ত তালিকা থেকে, P_{10} এবং P_{90} নির্ণয় করুন।

	চলকের (মানের) শ্রেণি	**পরিসংখ্যা (*f*)**	**ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (*cf*)**
	0 – 10	4	4
P_{10}	10 – 20	$\boxed{6}$	4 + 6 = 10
	20 – 30	20	10 + 20 = 30
	30 – 40	10	30 + 10 = 40 (F)
P_{90}	40 – 50	$\boxed{7}$	40 + 7 = 47
	50 – 60	3	47 + 3 = 50

এক্ষেত্রে, P_{10} = চলের $\left(\frac{10\times 50}{100}\right)$-তম স্থানের মান

= চলের পঞ্চম স্থানের মান

সেই কারণে, P_{10} (ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা তালিকা অনুসারে),

(10 – 20) শ্রেণিবিভাগের অন্তর্গত।

$$\therefore P_{10} = 20 + \left\{\frac{10\left(\frac{50}{100}\right)-10}{6}\right\}\times 10$$ [(C) বিভাগের (1) নং সূত্রে N/2 -

$$= 20 + \left(\frac{5-10}{6}\right)\times 10$$ এর স্থানে $10\left(\frac{N}{100}\right)$ লিখতে হবে।]

$$= 20 - \frac{50}{6} = 20 - \frac{25}{3}$$

$= 20 - 8{\cdot}33$ (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত)

$= 11{\cdot}67$

অনুরূপে, P_{90} = চলের $\left(\frac{90\times 50}{100}\right)$-তম স্থানের মান

= চলের 45-তম স্থানের মান

এক্ষেত্রে উল্লেখযোগ্য যে P_{90} (ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা তালিকা অনুসারে), (40 – 50) শ্রেণি বিভাগের অন্তর্গত।

$$\therefore P_{90} = 40 + \left(\frac{45-40}{7}\right)\times 10$$ [(C) বিভাগের (1) নং সূত্র থেকে পাই যেখানে

$$= 40 + \frac{5\times 10}{7}$$ [$\frac{N}{2}$ এর জায়গায় $90\left(\frac{N}{100}\right)$ লিখতে হবে।]

$= 40 + \frac{50}{7} = 40 + 7{\cdot}14$ (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত)।]

∴ নির্ণেয় $P_{10} = 11{\cdot}67$ এবং $P_{90} = 47{\cdot}14$ **(উত্তর)**

বিবিধ উদাহরণ মালা ঃ

উদা. (1) প্রঃ যৌগিক (AM) গড় $(\overline{x})$ নির্ণয় করুন (তালিকা নীচে দেওয়া আছে)।

সমাধান ঃ

x	f	$d=\frac{x-40}{10}$	fd
10	9	–3	9 × (–3) = –27
20	18	–2	18 × (–2) = –36
30	25	–1	25 × (–1) = –25
A = 40	27	0	27 × 0 = 0
50	14	1	14 × 1 = 14
60	7	2	7 × 2 = 14
মোট	100	–	= 60

[এস্থলে, $d=\frac{x-A}{h}$]

$\therefore$ নির্ণেয় যৌগিক গড় $(\overline{x})=A+\frac{\sum fd}{\sum f}\times h$

$=40+\frac{(-60)}{100}\times 10$ [এস্থলে, $h = 10$]

$=40-\frac{60}{10}$

$=40-6=34$

উদা. (2) প্র: দুটি সংখ্যার যৌগিক গড় (AM) হলো 6·5 এবং এদের গুণোত্তর গড় (GM) যদি 6 হয় তবে এদের বিবর্ত যৌগিক গড় (HM) নির্ণয় করুন।

সমাধান : আমরা জানি যে, যৌগিক গড় × বিবর্ত যৌগিক গড় = (গুণোত্তর গড়)^2 (দুটি সংখ্যার ক্ষেত্রে)

প্রশ্নমতে, 6·5 × বিবর্ত যৌগিক গড় = $(6)^2$

বা, বিবর্ত যৌগিক গড় $=\frac{36}{6\cdot5}=\frac{36\times\cancel{1}\cancel{0}^{2}}{\cancel{6}\cancel{5}_{13}}=\frac{72}{13}$ = 5·54 (আসন্ন)

$\therefore$ সংখ্যা দুটির নির্ণেয় বিবর্ত যৌগিক গড় (HM) = 5·54 **(উত্তর)**

(b) প্র: যদি তিনটি সংখ্যা *a*, 4 এবং 8 -এর গুণোত্তর গড় (GM) 6 হয় তবে *a* এর মান কত?

সমাধান ঃ প্রশ্নানুসারে, $(a \times 4 \times 8)^{1/3} = 6$

বা, $(32a)^{1/3} = 6$

বা, $32a = 6^3$ [উভয় পক্ষের ঘন নিয়ে]

বা, $a = \frac{216}{32} = \frac{27}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় a এর মান $= \frac{27}{4} = 6.75$

উদা. (3) প্র: নীচের তালিকা থেকে AM (যৌগিক গড়) এবং প্রথম চতুর্থক (Q_1) 1st quartile) নির্ণয় করুন। ধরে নিন কল্পিত গড় = 44·5

সমাধান ঃ

শ্রেণি (চলকের)	পরিসংখ্যা (f)	শ্রেণি সীমানা **(class boundaries)**	শ্রেণির মধ্যমান (x)	$u = \frac{x-A}{h}$ **A = 445, *h* = 10**	$f \times u = fu$	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা
0 – 9	25	0·5 – 9·5	4·5	–4	–100	25
10 – 19	37	9·5 – 19·5	14·5	–3	–111	25 + 37 = 62
20 – 29	81	19·5 – 29·5	24·5	–2	–162	62 + 81 = 143 (F)
30 – 39	290	29·5 – 39·5	34·5	–1	–290	143 + 290 = 433
40 – 49	253	39·5 – 49·5	44·5 (= A)	0	0	433 + 253 = 686
50 – 59	225	49·5 – 59·5	54·5	1	225	686 + 225 = 911
60 – 69	46	59·5 – 69·5	64·5	2	46	911 + 46 = 957
70 – 79	22	69·5 – 79·5	74·5	3	22	957 + 22 = 979
80 – 89	17	79·5 – 89·5	84·5	4	17	979 + 17 = 996
90 – 99	4	89·5 – 99·5	94·5	5	4	996 + 4 = 1000
মোট	$N = \sum f = 1000$	—	—	—	$\sum fu = -192$	—

ধরি, যৌগিক গড় (AM) $= \overline{x}$

$$\therefore\ \bar{x} = \mathrm{A} + \frac{\sum fu}{\sum f} \times h \ = 44\cdot5 + \frac{(-192)}{1000} \times 10 = 44\cdot5 - 1\cdot92 \ = 42\cdot58$$

প্রথম চতুর্থক (Q_1) $= \mathrm{L} + \dfrac{\frac{\mathrm{N}}{4} - F}{f} \times i$ [(C) বিভাগের (1) নং সূত্রানুসারে]

$$= 29\cdot5 + \left(\frac{\frac{1000}{4} - 143}{290} \right) \times 10 \quad = 29\cdot5 + \frac{250 - 143}{290} \times 10$$

$$= 29\cdot5 + \frac{107}{29} \ = 29\cdot5 + 3\cdot69 \text{ (আসন্ন) } = 33\cdot19$$

উত্তর : যৌগিক গড় = 42·58

এবং প্রথম চতুর্থক (Q_1) = 33·19

[এস্থলে, $\frac{\mathrm{N}}{4} = \frac{1000}{4} = 250$ । ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা তালিকা থেকে পাই $250\left(= \frac{\mathrm{N}}{4}\right)$ -এর জন্য (30 – 39) শ্রেণি বিভাগ বা (29·5 – 39·5) শ্রেণি সীমানাকে ধ'রতে হবে, i = h = 10, f = 290]

শ্রেণি সীমা	**শ্রেণির মধ্যমান (x)**	$u = \frac{x - \mathrm{A}}{h}$ **A = 11, h = 0·5**	**পরিসংখ্যা (f)**	fu
9·3 – 9·7	9·5	–3	2	2 × (–3) = –6
9·8 – 10·2	10	–2	5	5 × (–2) = –10
10·3 – 10·7	10·5	–1	f_3	f_3 (–1) = $-f_3$
10·8 – 11·2	11 (A)	0	f_4	0
11·3 – 11·7	11·5	1	14	14 × 1 = 14
11·8 – 12·2	12	2	6	6 × 2 = 12
12·3 – 12·7	12·5	3	3	3 × 2 = 6
12·8 – 13·2	13	4	1	1 × 4 = 4
মোট	—	—	$\mathrm{N} = \sum f =$ $31 + f_3 + f_4$	$\sum fu = 23 - f_3$

যদি যৌগিক গড়ের মান 11·09 এবং $\sum f = 60$ হয় তবে উপরের তালিকা থেকে f_3 ও f_4 নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রশ্নানুযায়ী, যৌগিক গড় $(\overline{x}) = 11{\cdot}09$

সুতরাং, $\overline{x} = \mathrm{A} + \dfrac{\sum fu}{\mathrm{N}} \times h$ [যেখানে A = 11, h = 0·5 $\mathrm{N} = \sum f = 60,$ এবং $\overline{x} = 11{\cdot}09$]

বা, $\overline{x} = 11 + \dfrac{23 - f_3}{60} \times 0{\cdot}5$

বা, $11{\cdot}09 = 11 + \left(\dfrac{23 - f_3}{60}\right) \times \dfrac{1}{2}$

বা, $11{\cdot}09 - 11 = \dfrac{23 - f_3}{120}$

বা, $0{\cdot}09 \times 120 = 23 - f_3$

বা, $10{\cdot}8 = 23 - f_3$

বা, $f_3 = 23 - 10{\cdot}8$

$= 12{\cdot}2$

$\therefore\ f_3 = 12$ যেহেতু, পরিসংখ্যা নির্দেশক (f_3) সর্বদা ধনাত্মক অখন্ড সংখ্যা।

পুনরায়, তালিকা অনুসারে,

$\mathrm{N} = \sum f = 31 + f_3 + f_4$

শর্তানুসারে, $\mathrm{N} = 60$

$\therefore 31 + f_3 + f_4 = 60$

বা, $f_3 + f_4 = 60 - 31$

বা, $f_3 + f_4 = 29$

বা, $f_4 = 29 - f_3$

বা, $f_4 = 29 - 12 \left[\therefore f_3 = 12\right]$

বা, $f_4 = 17$

$\therefore$ নির্ণেয় f_3 = 12 এবং f_4 = 17 **(উত্তর)**

উদা. (5) প্রদত্ত পরিসংখ্যা বিভাজন ছক থেকে 'মধ্যমা' নির্ণয় করুন।

শ্রেণী সীমা	**পরিসংখ্যা (f)**	**ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা**	**শ্রেণির মধ্যমান (x)**
0 – 10	6	6	5
10 – 20	8	(6 + 9) = 14 (F)	15
20 – 30	11	(14 + 11) = 25	25
30 – 40	18	(25 + 18) = 43	35
40 – 50	5	(43 + 5) = 48	45
50 – 60	2	(48 + 2) = 50	55
মোট	$N = \sum f = 50$	–	–

এস্থলে, $\frac{N}{2} = \frac{50}{2} = 25$

$\therefore$ মধ্যমা শ্রেণি হ'ল (20 – 30) । ঐ শ্রেণির নিম্ন সীমা (সীমানা) L = 20, F [ক্রমযৌগিক সংখ্যা (মধ্যমা শ্রেণির পূর্বেই অবস্থিত)]

f_m = মধ্যমা শ্রেণির নিজস্ব পরিসংখ্যা = 10, শ্রেণি দৈর্ঘ্য (h) = 10

$$\therefore \text{মধ্যমা (M)} = L + \frac{N/2 - F}{f_m} \times h$$

$$= 20 + \frac{(25 - 14)}{11} \times 10$$

$$= 20 + \frac{11}{11} \times 10$$

$$= 20 + 10 = 30$$

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যমা = 30 **(উত্তর)**

উদা. (6)

শ্রেণি সীমা (চলকের)	**পরিসংখ্যা (f)**	**ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা**
20 – 25	5	5
25 – 30	70	5 + 70 = 75
30 – 35	100	75 + 100 = 175
35 – 40	180	175 + 180 = 355 (F)
40 – 45	150	355 + 150 = 505
45 – 50	120	505 + 120 = 625
50 – 55	70	625 + 70 = 695
55 – 60	60	695 + 60 = 755
মোট	$N = \sum f = 755$	—

উপরোক্ত তালিকা সাপেক্ষে মধ্যমা (median) এবং সংখ্যাগুরু মান (mode) নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

এক্ষেত্রে, $\frac{N}{2} = \frac{755}{2} = 377{\cdot}5$

$\frac{N}{2}$ -এর সাপেক্ষে মধ্যমা শ্রেণি (median class)/ শ্রেণি (সীমানা) (median class boundary) হ'ল (40 – 45)

(i) মধ্যমা $(M) = L + \left(\frac{\frac{N}{2} - F}{f_m}\right) \times h$ যেখানে h = শ্রেণি দৈর্ঘ্য

$$= 40 + \frac{377{\cdot}5 - 355}{150} \times 5$$

L = মধ্যমা শ্রেণির নিম্ন সীমানা

$$= 40 + \frac{22{\cdot}5}{150} \times 5$$

F = মধ্যমা শ্রেণির পূর্ববর্তী ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা

f_m = মধ্যমা শ্রেণির নিজস্ব পরিসংখ্যা

$$= 40 + \frac{225}{30 \times 10} = 40 + \frac{225}{300} = 40 + 0{\cdot}75$$

$$= 40{\cdot}75$$

সর্বোচ্চ পরিসংখ্যা 180, (35 – 40) শ্রেণিতে অবস্থিত, এটাই সংখ্যাগুরু শ্রেণি (modal class)

(ii) সংখ্যাগুরুমান (mode) $= \mathrm{L}_1 + \left(\dfrac{f - f_1}{2f - (f_1 + f_2)}\right) \times h$

$$= 35 + \left\{\frac{180 - 100}{2 \times 180 - (100 + 150)}\right\} \times 5$$

$$= 35 + \frac{80}{360 - 250} \times 5$$

L_1 = সংখ্যাগুরু শ্রেণির নিম্নসীমা

f = সংখ্যাগুরু শ্রেণির নিজস্ব পরিসংখ্যা

f_1 = সংখ্যাগুরু শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির পরিসংখ্যা

f_2 = সংখ্যাগুরু শ্রেণির পরবর্তী শ্রেণির পরিসংখ্যা

$= 35 + \dfrac{80 \times 5}{110} = 35 + \left(\dfrac{40}{11}\right) = 35 + 3{\cdot}64$ (আসন্ন)

$= 38{\cdot}64$

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যমা = 40·75

এবং সংখ্যাগুরু মান = 38·64 **(উত্তর)**

উদা. (7) চলের নিম্নোক্ত বিভাজন (পরিসংখ্যা) ছকে প্রাপ্ত যৌগিক গড় 7·5 হলে p এর মান কত হবে, তা নির্ণয় করুন।

শ্রেণি সারণিতে চলকের মান (x_i)	**পরিসংখ্যা (f_i)**	$f_i x_i$
3	6	6 × 3 = 18
5	8	8 × 5 = 40
7	15	15 × 7 = 105
9	p	p × 9 = 9p
11	8	8 × 11 = 88
13	4	4 × 13 = 52
মোট	$\sum f = 41 + p$	$\sum f_i x_i = 303 + 9p$

সমাধান ঃ প্রশ্নমতে, যৌগিক গড় $(\overline{x}) = 7{\cdot}5$

আমরা জানি যে, যৌগিক গড় $(\overline{x}) = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

বা, $7{\cdot}5 = \dfrac{303+9p}{41+p}$

বা, $\dfrac{75}{10} = \dfrac{303+9p}{41+p}$

বা, $\dfrac{15}{2} = \dfrac{303+9p}{41+p}$

বা, $2(303+9p) = 15(41+p)$

বা, $606+18p = 615+15p$

বা, $18p-15p = 615-606$

বা, $3p = 9$ বা, $p = \dfrac{9}{3}$ বা, $p = 3$

$\therefore$ p -এর নির্ণেয় মান = 3 **(উত্তর)**

উদা. (8) প্র: যৌগিক গড় নির্ণয় করুন যখন ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (Cumulative frequencey) ছকটি নিম্নরূপ :

প্রাপ্ত নম্বর	ছাত্রদের সংখ্যা
0 -এর অধিক	60
10 -এর অধিক	56
20 -এর অধিক	40
30 -এর অধিক	20
40 -এর অধিক	10
50 -এর অধিক	3

সমাধান ঃ উপরিউক্ত চলের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটিকে উপযুক্তভাবে বিন্যস্ত করে পাই :

প্রাপ্ত নম্বর	**ছাত্রদের সংখ্যা**	**শ্রেণির মধ্যমান** (x_i)	**পরিসংখ্যা** (f_i)	$f_i x_i$
0 -এর অধিক	60	$\frac{0+10}{2}=5$	4	4 × 5 = 20
10 -এর অধিক	56	15	16	16 × 15 = 240
20 -এর অধিক	40	25	20	20 × 25 = 500
30 -এর অধিক	20	35	10	10 × 35 = 350
40 -এর অধিক	10	45	7	7 × 45 = 315
50 -এর অধিক	3	55	3	3 × 55 = 165
মোট		–	$\sum f_i = 60$	$\sum f_i x_i = 1590$

আমরা জানি যে

$$\text{যৌগিক গড় } (\bar{x}) = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

$$= \frac{1590}{60} \left[\begin{array}{c} \because \sum f_i x_i = 1590 \\ \sum f_i = 60 \end{array} \right]$$

$$= \frac{53}{2}$$

$$= 26{\cdot}5$$

$\therefore$ নির্ণেয় যৌগিক গড় = 26·5 **(উত্তর)**

উদা. (9) যদি x_1 এবং x_2 দুটি ভিন্ন মানের সংখ্যা হয় তবে প্রমাণ করো যে উহাদের যৌগিক গড় > গুণোত্তর গড় > বিবর্ত যৌগিক গড় (HM)

সমাধান ঃ ধরি, দুটি ভিন্ন সংখ্যার, যৌগিক গড় = A,

গুণোত্তর যৌগিক গড় = G

এবং বিবর্ত যৌগিক গড় = H

এখন, $A - G = \frac{x_1 + x_2}{2} - \sqrt{x_1 x_2}$

$$= \frac{x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2}}{2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x_1}\right)^2 + \left(\sqrt{x_2}\right)^2 - 2\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2}}{2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)^2}{2} > 0$$

[কারণ, $x_1 \neq x_2$ বা, $\sqrt{x_1} \neq \sqrt{x_2}$ বা, $\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \neq 0$ বা, $\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)^2 > 0$ (পূর্ণবর্গ বলে)]

$\therefore$ A > G.....(i)

[সুতরাং, যৌগিক গড় > গুণোত্তর গড়]

পুনরায়, $G^2 = A \times H$

বা, $\frac{G}{H} = \frac{A}{G}$

বা, $\frac{G}{H} > 1$ [কারণ, $\frac{A}{G} > 1$, (i) নং থেকে]

বা, G > H....(ii)

[$\therefore$ গুণোত্তর গড় > বিবর্ত যৌগিক গড়]

(i) ও (ii) সম্পর্ক দুটি থেকে পাই

A > G > H

অর্থাৎ যৌগিক গড় > গুণোত্তর গড় > বিবর্ত যৌগিক গড় **(প্রমাণিত)** (দুটি ভিন্ন মানের সংখ্যার ক্ষেত্রে)

উদা. (10) প্র: অ-প্রতিসম (asymmetric) রাশি তথ্যসমূহের ক্ষেত্রে সংখ্যাগুরু মান (mode) এবং যৌগিক গড় (arithmetic mean) যথাক্রমে 16 এবং 20·2 হলে উক্ত রাশিতথ্যসমূহের সম্ভাব্য মধ্যমা (median) নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ আমরা জানি যে

যৌগিক গড় – সংখ্যাগুরু মান = 3 (যৌগিক গড় – মধ্যমা)

বা, $x-z=3(x-y)$ [ধরি, যৌগিক গড় = x, মধ্যমা = y এবং সংখ্যাগুরু মান = z]

বা, $x-z=3x-3y$

বা, $3y=3x-x+z$

বা, $3y=2x+z$

বা, $3y=2\times 20{\cdot}2+16$

বা, $3y=40{\cdot}4+16$

বা, $3y=56{\cdot}4$

বা, $y=\frac{56{\cdot}4}{3}$

বা, $y=18{\cdot}8$

∴ নির্ণেয় মধ্যমার সম্ভাব্য মান = 18·8 **(উত্তর)**

উদা. (11)

চলকের শ্রেণি বিভাগ	পরিসংখ্যা (f)	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা
0 – 10	14	14
10 – 20	f_1	$14+f_1$
20 – 30	27	$41+f_1$
30 – 40	f_2	$41+f_1+f_2$
40 – 50	15	$N=56+f_1+f_2$

চলের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকে যদি মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মান 25 এবং 24 হয় তবে f_1 ও f_2 নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ এক্ষেত্রে, শর্তানুসারে মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মান যথাক্রমে 25 এবং 24 : ইহারা উভয়েই স্পষ্টত (20 – 30) শ্রেণি বিভাগে অবস্থিত।

$$\therefore 25=20+\frac{\left(\frac{56+f_1+f_2}{2}\right)-(14+f_1)}{27}\times 10$$ [(C) বিভাগের ‘মধ্যমা’ সূত্র অনুসারে]

বা, $5=\dfrac{\left\{28+\left(\dfrac{f_1+f_2}{2}\right)-14-f_1\right\}10}{27}$

বা, $135=\left\{14+\left(\dfrac{f_2-f_1}{2}\right)\right\}\times 10$

বা, $135=140+5\left(f_2-f_1\right)$

বা, $5\left(f_1-f_2\right)=5$

বা, $f_1-f_2=1.....(1)$

পুনরায়, $24=20+\left\{\dfrac{27-f_1}{2\times 27-\left(f_1+f_2\right)}\right\}\times 10$ [(C) বিভাগের সংখ্যাগুরু মানের সূত্রানুসারে]

বা, $4=\dfrac{\left(27-f_1\right)10}{54-\left(f_1+f_2\right)}$

বা, $216-4\left(f_1+f_2\right)=270-10f_1$

বা, $10f_1-4f_1-4f_2=54$

বা, $6f_1-4f_2=54$ বা, $3f_1-2f_2=27....(\text{ii})$

{(ii) – 2 × (i)} প্রয়োগ করে পাই

$$\begin{array}{r} 3f_1-2f_2=27 \\ 2f_1-2f_2=2 \\ -\quad +\quad - \\ \hline \end{array}$$

বা, $f_1=25$

এখন, $f_1=25$, (i) নং -তে বসিয়ে পাই

$$25-f_2=1$$

বা, $-f_2 = -24$ বা, $f_2 = 24.$

$\therefore$ নির্ণেয় $f_1 = 25$ এবং $f_2 = 24$ **(উত্তর)**

উদা. (12)

	চলরাশির শ্রেণি	**পরিসংখ্যা (*f*)**	**ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা**
	0 – 10	8	8 (F)
D_2	10 – 20	$\boxed{10}$	8 + 10 = 18
	20 – 40	22	18 + 22 = 40
	40 – 60	25	40 + 25 = 65
	60 – 80	10	65 + 10 = 75
	80 – 100	5	75 + 5 = 80
	মোট	$N = \sum f = 80$	

প্রদত্ত চলের বিভাজন (পরিসংখ্যা) ছক অনুসারে D_2 এবং P_5 নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ D_2(দ্বিতীয় দশকম) = চলের $\left(\frac{2 \times n}{10}\right)$-তম স্থানের মান

= চলের $\left(\frac{2 \times 80}{10}\right)$-তম স্থানের মান

= চলের 16-তম স্থানিক মান

নি:সন্দেহে, D_2 (ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা তালিকা অনুসারে) (10 – 20) শ্রেণি বিভাগে অবস্থিত।

$$\therefore D_2 = L + \left(\frac{\frac{2 \times n}{10} - F}{f}\right) \times h$$

$$= 10 + \left(\frac{16 - 8}{10}\right) \times 10$$

$$= 10 + 8 = 18$$

পুনরায়, P_5 (পঞ্চম শততমক) = চলের $\left(\frac{5 \times n}{100}\right)$-তম স্থানের মান

$$= \text{চলের} \left(\frac{5\times 80}{100}\right)\text{-তম স্থানের মান}$$

$$= \text{চলের চতুর্থ স্থানের মান}$$

স্পষ্টতই, P_5 (ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা তালিকা অনুসারে)

(0 – 10) শ্রেণি বিভাগে অবস্থিত।

$$\therefore P_5 = L + \left(\frac{\frac{5\times n}{100} - F}{f}\right)\times h$$

$$= 0 + \left(\frac{\frac{5\times 80}{100} - 0}{8}\right)\times 10$$

$$= 0 + \frac{(4-0)10}{8}$$

$$= \frac{40}{8} = 5$$

∴ নির্ণেয় $D_2 = 18$ এবং $P_5 = 5$ **(উত্তর)**

প্রশ্নমালা—1

1.

x	4	2	3	5	7	5	4
f	50	55	63	70	71	80	91

যৌগিক গড় নির্ণয় করুন। [**উত্তর :** 70·33]

2. মান নির্ণয় করুন :

(a) $\sum_{i=1}^{30} i$ (b) $\sum_{i=1}^{n} (c+2di)$ [c, d > 0, ধ্রুবক]

[**উ.** (a) 1095 (b) $cn + n(n+1)d$]

3. যৌগিক গড় নির্ণয় করুন :

শ্রেণি বিভাগ	**পরিসংখ্যা**
0 – 10	6
10 – 20	8
20 – 30	15
30 – 40	2
40 – 50	5
50 – 60	2
60 – 17	7

(উ. 30·78)

4. যদি $y_i = \frac{x_i - a}{b}$ (i = 1, 2, ..., n ; a, b ধনাত্মক ধ্রুবক সংখ্যা)

প্রমাণ করুন যে, $\overline{x} = a + b\overline{y}$

5. প্রমাণ করুন যে $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}(x_i - \mathrm{A})^2$ সর্বনিম্ন হবে যখন $\mathrm{A} = \overline{x}$, যেখানে $x_1, x_2, ..., x_n$ (n সংখ্যক চলরাশি), A (ধ্রুবক) এবং $\overline{x}$ (যৌগিক গড়)।

6.

চলের শ্রেণি সীমা	**পরিসংখ্যা (*f*)**
90 – 99	2
80 – 89	12
70 – 79	22
60 – 69	20
50 – 59	14
40 – 49	4
30 – 39	1

উপরের চলের পরিসংখ্যা বিভাজন ছক থেকে মধ্যমা নির্ণয় করুন।

[উ. মধ্যমা = 68·75]

7. সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি (Short cut method) অবলম্বনে যৌগিক গড় নির্ণয় করুন :

শ্রেণি সীমা	পরিসংখ্যা
5 – 10	10
10 – 15	6
15 – 20	4
20 – 25	12
25 – 30	8
30 – 35	4
35 – 40	2
40 – 45	1
45 – 50	3

[উ. 22]

8. চলের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটি নিম্নরূপ :

শ্রেণি সীমা	পরিসংখ্যা
0 – 5	2
5 – 10	7
10 – 15	18
15 – 20	10
20 – 25	8
25 – 30	5

মান নির্ণয় করুন (i) যৌগিক গড় (AM)

(ii) মধ্যমা (Median)

(iii) সংখ্যাগুরু মান (Mode)

[উ. (i) 15·5

(ii) 14·44

(iii) 12·89

9.

প্রাপ্ত নম্বর	**ছাত্রসংখ্যা**
10 -এর নীচে	3
20 -এর নীচে	8
30 -এর নীচে	17
40 -এর নীচে	20
50 -এর নীচে	22

উপরিউক্ত তালিকা থেকে মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করুন।

(উ. মধ্যমা = 23·33 সংখ্যাগুরু মান = 24)

10.

দৈনিক মজুরি (টাকায়)	**শ্রমিক সংখ্যা**
100 -এর নিচে	8
100 – 200	12
200 – 300	25
300 – 400	15
400 – 500	10
500 -এর উর্দ্ধে	6

উপরের দৈনিক মজুরি—তালিকা অনুসারে শ্রমিকদের প্রাপ্ত মজুরির সংখ্যাগুরু মান কত হবে তা স্থির করুন।

ইঙ্গিত : [সর্বোচ্চ পরিসংখ্যা = 25, সংখ্যাগুরু মান যে শ্রেণিতে অবস্থিত তা হ'ল (200 – 300)]

(উ. 256·52)

11.

চলকের শ্রেণি	**পরিসংখ্যা**
0 – 10	8
10 – 20	10
20 – 40	22
40 – 60	25
60 – 80	10
80 – 100	5

প্রদত্ত তালিকা থেকে Q_3 (তৃতীয় চতুর্থক), P_{90} (নব্বই শততমক) নির্ণয় করুন।

(উ. $Q_3 = 56$, $P_{90} = 74$)

12.

x	f
5	8
6	10
7	18
8	2
9	16
10	5
11	13
12	1

চলের পরিসংখ্যা ছক থেকে গুণোত্তর গড় (GM) এবং যৌগিক বিবর্ত গড় (HM) নির্ণয় করুন।

(উ. GM = গুণোত্তর গড়) = 7·83 = যৌগিক বিবর্ত গড় (HM) = 5·16)

13.

চলরাশিগুলির মধ্যমান (Mid-values of the variable)	**পরিসংখ্যা** (frequency)
115	6
125	25
135	48
145	72
155	116
165	60
175	38
185	22
185	3

প্রদত্ত পরিসংখ্যা বিভাজন ছক থেকে মধ্যমা (median) নির্ণয় করুন।

(উ. 153·79) (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত)

14.

শ্রেণি	পরিসংখ্যা
0 – 4	328
5 – 9	350
10 – 19	720
20 – 29	664
30 – 39	598
40 – 49	524
50 – 59	378
60 – 69	244

উপরের প্রদত্ত তালিকা সাপেক্ষে সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করুন।

(উ. 13·74)

15. $\sum_{i=1}^{n}(x_i - 5) = 40$ এবং $\sum_{i=1}^{n}(x_i + 3) = 120$ হলে n ও $\bar{x}$ নির্ণয় করুন।

[**উত্তর** : $n = 10$, $\bar{x} = 9$]

16. নিচের তালিকা থেকে অজানা 'x' -এর মান নির্ণয় করুন যখন যৌগিক গড় = 115·86,

মজুরি (টাকায়)	110	112	113	117	x	125	128	130
কর্মরত শ্রমিক সংখ্যা	25	17	13	15	14	8	6	2

(**উত্তর** : x = 120 টাকা)

17. একটি দ্রব্যের মূল্য 4 বছর সময়কালে দ্বিগুণ হয়। দ্রব্যের গড় মূল্য শতকরা কীভাবে বৃদ্ধি পায় তা নির্ণয় করুন।

(**উত্তর** : 19%)

18. বেতন বাবদ 100 জন কর্মরত পুরুষ ও মহিলাকে বছরে গড়ে 5,000 টাকা হিসাবে দেওয়া হয়। পুরুষ কর্মচারীদের গড়ে 5,200 টাকা এবং মহিলা কর্মীদের গড়ে 4,200 টাকা হিসাবে দেওয়া হলে, ছোট কারখানাটিতে কতজন পুরুষ এবং কতজন মহিলা কর্মী কাজ করেন তা নির্ণয় করুন।

(**উত্তর** : পুরুষ কর্মীর সংখ্যা = 80 এবং মহিলা কর্মীর সংখ্যা = 20)

19. নিচের তালিকা থেকে মধ্যমা (median) এবং সংখ্যা গুরুমান (mode) নির্ণয় করুন। লেখচিত্রের সাহায্য নিন। পরে গড় (যৌগিক গড়) নির্ণয় করুন।

(**উত্তর** : মধ্যমা = 25 সংখ্যাগুরু মান = 24·6 যৌগিক গড় = 25·2)

প্রাপ্ত নম্বর	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
ছাত্র সংখ্যা	5	12	25	10	8

19 নং প্রশ্নের [**ইঙ্গিত (Hints) :** Ogive থেকে median, Histogram থেকে, mode নির্ণয় করুন পরে সূত্রটিকে ব্যবহার ক'র: 3 × median – 2 × Mean = Mode]

20. একটি এলাকায় 100 জন ব্যক্তির গড় (যৌগিক) বয়স 32·02 (বছর), দেখা গেল যে 57 বছর বয়স্ক ব্যক্তির বয়স ভুল ক্রমে 27 বছর হিসাবে গণ্য করা হয়েছে। সঠিক যৌগিক গড়টি কত হবে তা নির্ণয় করুন।

(**উত্তর** : সঠিক যৌগিক গড় = 32·32)

6.4 বিস্তৃতি

চলরাশি সমূহের বিভাজন (পরিসংখ্যা) এর মাধ্যমে আমরা যে সমস্ত কেন্দ্রীয় প্রবণতার (বা মধ্যগামিতা) পরিমাপ পেয়েছি তারা প্রত্যেকেই বিভাজন ছকের 'প্রতিনিধি' (representative) হিসাবে কাজ করে। ফলত: চলরাশি সমূহের মানগুলি কেন্দ্রীয় মানের চারিদিকে কীভাবে ছড়িয়ে থাকে তাকে অনুমান করা সহজসাধ্য নয়। সুতরাং কেন্দ্রীয় মানকে ঘিরে চলরাশিগুলির ছড়িয়ে থাকার বিশেষ বৈশিষ্ট্যকেই তার 'বিস্তৃতি' (Dispersion) বলা হয়। রাশিতথ্যসমূহের প্রকৃতি (nature) সঠিক ভাবে অনুধাবন করার জন্য বিস্তৃতির বিচার বিশ্লেষণ জরুরি। বিস্তৃতির পরিমাপগুলিকে প্রধানত চারটি ভাগে বিভক্ত করা হয়। যথা:

(i) প্রসার (range)

(ii) চতুর্থক বিচ্যুতি (quartile deviation)

(iii) গড় বিচ্যুতি (mean deviation)

(iv) প্রমাণ বিচ্যুতি বা সমক বিচ্যুতি (standard deviation)

এগুলিকে আমরা নিম্নলিখিত উপায়ে সংজ্ঞায়িত ক'রব।

(A) প্রসার (range) :

বিস্তৃতির সবচেয়ে সহজ সরল পরিমাপ পদ্ধতি হ'ল প্রসার। ইহা সর্বদা তথ্যরাশিমালার অন্তর্গত বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মান দুটির পার্থক্যকে নির্দেশ করে। শ্রেণিবদ্ধ চলকের বিভাজনে সর্বশেষ শ্রেণির উর্দ্ধ সীমান্ত এবং সর্বপ্রথম শ্রেণীর নিম্নসীমান্তের [শ্রেণিসমূহ মানের উর্দ্ধক্রমে সজ্জিত থাকলে] প্রভেদ বা পার্থক্যই হবে

চলের বিভাজন প্রসার। সেজন্য প্রসার চলের প্রত্যেক দেয় মানের উপর নির্ভর করে না, এটা নির্ভর করে প্রান্তস্থ মান দুটির উপর। চলকের পরিসংখ্যা বিভাজনে প্রান্তীয় শ্রেণি বিভাগ মুক্ত অবস্থায় থাকলে প্রসারের পরিমাপ করা যায় না।

উদা. (1) সরল ভাবে রাশিতথ্যগুলি সুসজ্জিত যেমন 20, 21, 22, 25, 30, 32, 37, 40 ; এক্ষেত্রে প্রসার = 40 – 20 = 20.

(B) চতুর্থক বিচ্যুতি (বা আন্তঃ চতুর্থক অর্ধপ্রসার) [quartile deviation or semi-inter-quartile range] :

চলরাশির প্রদত্ত মানগুলিকে উর্ধ্বক্রমে সাজিয়ে নিয়ে সমান চারটি ভাগে বিভক্ত করা হ'ল। পরে এভাবে সাজানো চলকের যে মানটি সমগ্র বিভাজনকে 1 : 3 অনুপাতে বিভক্ত করে তাকে চলের প্রথম চতুর্থক (Q_1) 1st quartile) এবং চলের যে মানটি সামগ্রিক ভাবে বিভাজনকে 3 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে তাকে চলের তৃতীয় চতুর্থক (Q_3) (Third quartile) হিসাবে বিবেচনা করা হয়। শ্রেণিবন্ধ চলের পরিসংখ্যা বিভাজনে কীভাবে প্রথম চতুর্থক (Q_1) এবং তৃতীয় চতুর্থক (Q_3) নির্ধারণ করা হয় তা পূর্বেই আলোচনা করা হয়েছে। Q_1 এবং Q_3 -কে পাবার পর চতুর্থক বিচ্যুতিকে [Quartile deviation বা Q·D (সংক্ষেপে)] কে নিম্নোক্তভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়।

$$\text{চতুর্থক বিচ্যুতি (Q·D)} = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$$

গঠন-অনুসারে একে আন্ত -চতুর্থক অর্ধপ্রসার বলা হয়।

উদা. (2) নিচের তথ্যরাশির পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে সহজেই চতুর্থক বিচ্যুতি নির্ণয় ক'রতে পারি।

চলক (*x*)	**পরিসংখ্যা (*f*)**	**ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা**
2	3	3
3	4	3 + 4 = 7
4	8	7 + 8 = 15
5	3	15 + 3 = 18
6	2	18 + 2 = 20 = (N)
মোট	$\sum f = N = 20$	

সমাধান :

এক্ষেত্রে N = 20 ;

প্রথম চতুর্থক (Q_1) = চলের $\left(\frac{N+1}{4}\right)$ -তম স্থানের মান

= চলের $\left(\frac{20+1}{4}\right)$-তম স্থানের মান

= চলের $\frac{21}{4}$-তম স্থানের মান

= চলের ষষ্ঠ স্থানের মান (পরবর্তী পূর্ণসংখ্যাকে ধরে)

ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা তালিকা অনুসারে যা হ'ল 3

$\therefore$ $Q_1 = 3$

অনুরূপে, Q_3 = চলের $3\left(\frac{20+1}{4}\right)$ -তম স্থানের মান

= চলের (3 × 5·25)-তম বা 15·75 -তম স্থানের মান

= চলের 16 -তম স্থানের মান (পরবর্তী পূর্ণ সংখ্যায় প্রকাশ করে)

ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা তালিকা অনুসরণ করে সেটি হ'ল 5.

$\therefore$ Q_3 (তৃতীয় চতুর্থক) = 5.

$\therefore$ প্রদত্ত চলের বিভাজন (পরিসংখ্যা) অনুসারে,

চতুর্থক বিচ্যুতি $=\frac{1}{2}(Q_3-Q_1)=\frac{1}{2}(5-3) \ =\frac{1}{2}(2)=1$

উ. 1.

(C) গড় পার্থক্য বা গড় বিচ্যুতি (Mean Deviation বা M·D)

গড় পার্থক্য হলো চলরাশির (প্রদত্ত) যে-কোনো একটি গড় (যৌগিক গড় বা মধ্যমা বা সংখ্যাগুরু মান), থেকে রাশিসমূহের প্রত্যেকটির প্রভেদ বা বিচ্যুতির একটি পরম (বা চরম (absolute) পরিমাপ। এককথায়, গড় পার্থক্য (বা বিচ্যুতি) হলো 'গড়' থেকে চলরাশির মানসমূহের ধনাত্মক পার্থক্যগুলির যৌগিক গড়।

গাণিতিক ভাষায়, ধরি (x) চলরাশির n সংখ্যক মান হলো $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$; মানগুলির যৌগিক গড় বা গড় হলো $\bar{x}$. সুতরাং এই $(\bar{x})$ গড়ের প্রেক্ষিতে, গড় পার্থক্য $=\frac{1}{n}\{|x_1-\bar{x}|+|x_2-\bar{x}|+.....+ |x_n-\bar{x}|\}=\frac{1}{n}\sum|x_i-\bar{x}|, (i=1,2,....,n)$

[এক্ষেত্রে, $|x-\bar{x}|=(x-\bar{x})$ -এর পরম মান (absolute value) অর্থাৎ ধনাত্মক মানটি গ্রহণ করতে হবে।]

যদি x চলকের n সংখ্যক মান হয় $x_1, x_2, ...x_n$ এবং এদের অনুরূপ পরিসংখ্যা হয় $f_1, f_2, ...f_n$ তবে এক্ষেত্রে গড় পার্থক্য

$$(\text{M·D}) = \frac{1}{n}\left[f_1|x_1 - \bar{x}| + f_2|x_2 - \bar{x}| + f_3|x_3 - \bar{x}| + ... + f_n|x_n - \bar{x}|\right]$$

$$= \frac{1}{n}\sum f_i|x_i - \bar{x}| \text{ (সংক্ষিপ্ত রূপ)}$$

যেখানে, [চলের যৌগিক গড় বা গড়] $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum x_i}{n}, (i = 1, 2, ..., n)$

উদা. (4) (a) প্র. নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির গড় বিচ্যুতি (M·D) নির্ণয় করো (যৌগিক গড় সাপেক্ষে) ঃ 12, 6, 7, 3, 15, 10, 18 এবং 5

সমাধান ঃ প্রদত্ত সংখ্যাগুলির যৌগিক গড় $(\text{AM}) = \frac{12+6+7+3+15+10+18+5}{8}$

বা, $\bar{x} = \frac{76}{8} = \frac{19}{2} = 9{\cdot}5$

পরবর্তী পর্যায়ে আমাদের তালিকা প্রস্তুত করতে হবে যাতে যৌগিক গড় (9·5) -এর সাপেক্ষে প্রদত্ত সংখ্যাগুলির গড় বিচ্যুতি নির্ণয় করা যায়।

চলক সংখ্যার মান (x_i)	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$ **বা বিচ্যুতির (পরম মান)**
12	12 – 9·5 = 2·5	| 2·5 | = 2·5
6	6 – 9·5 = –3·5	| –3·5 | = 3·5
7	7 – 9·5 = –2·5	| –2·5 | = 2·5
3	3 – 9·5 = – 6·5	| – 6·5 | = 6·5
15	15 – 9·5 = 5·5	| 5·5 | = 5·5
10	10 – 9·5 = 0·5	| 0·5 | = 0·5
18	18 – 9·5 = 8·5	| 8·5 | = 8·5
5	5 – 9·5 = 4·5	| – 4·5 | = 4·5
মোট	$\sum(x_i - \bar{x}) = 0$	$\sum\lvert x_i - \bar{x}\rvert = 34{\cdot}0$

$\therefore$ নির্ণেয় গড় বিচ্যুতি $= \dfrac{\sum|x_i - \bar{x}|}{n}$

$$= \frac{34{\cdot}0}{8} = \frac{34}{8} = 4{\cdot}25$$

উ. 4·25

(b) প্র.

চলরাশির মান (x_i)	**পরিসংখ্যা (f_i)**	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert = \lvert x_i - 12\rvert$	$f_i\lvert x_i - \bar{x}\rvert$ $= f_i\lvert x_i - 12\rvert$
10	3	| 10 – 12 | = 2	3 × 2 = 6
11	12	| 11 – 12 | = 1	12 × 1 = 12
12	18	| 12 – 12 | = 0	18 × 0 = 0
13	12	| 13 – 12 | = 1	12 × 1 = 12
14	3	| 14 – 12 | = 2	3 × 2 = 6
মোট	$\mathrm{N} = \sum f_i = 48$	—	$\sum f_i\lvert x_i - \bar{x}\rvert = 36$

তালিকা সাপেক্ষে গড় বিচ্যুতি (যৌগিক গড় $(\bar{x})$ সাপেক্ষে) নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ এক্ষেত্রে, যৌগিক গড় $(\bar{x}) = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$

$$= \frac{3 \times 10 + 12 \times 11 + 18 \times 12 + 12 \times 13 + 3 \times 14}{3 + 2 + 18 + 12 + 5}$$

$$= \frac{30 + 132 + 216 + 156 + 42}{48} = \frac{576}{48} = 12$$

$\therefore$ নির্ণেয় গড় বিচ্যুতি (যৌগিক গড় $(\bar{x})$ সাপেক্ষে)

$$= \frac{\sum f_i|x_i - \bar{x}|}{\mathrm{N}}$$

$$= \frac{36}{48} = \frac{3}{4} = 0{\cdot}75$$

উ. 0·75

(D) প্রমাণ বিচ্যুতি বা সমক বিচ্যুতি (Standard deviation বা S.D)

সরল শ্রেণির ক্ষেত্রে, প্রথমে চলরাশিগুলির (x_i) নির্দিষ্ট মান সমূহের প্রত্যেকটি থেকে যৌগিক গড় $(\bar{x})$ পার্থক্য নির্ণয় করে তার বর্গ নিতে হবে। পরবর্তী স্তরে বর্গ ক'রে প্রাপ্ত মানগুলির যৌগিক গড় নির্ণয় করে তার উপর ধনাত্মক বর্গমূল আরোপ করলে যা পাওয়া যাবে তাকেই প্রমাণ বিচ্যুতি বা সমক বিচ্যুতি হিসাবে গণ্য করা হয়। ইহাকে গ্রীক অক্ষর σ (সিগমা) দিয়ে চিহ্নিত করা হয়।

(a) গাণিতিক ভাবে, ধরি চলকের n সংখ্যক মান হল $x_1, x_2, ..., x_n$ বা $x_i\left(i=1,2,....,n\right)$. রাশির মানসমূহ সরল ভাবে বিন্যস্ত। সুতরাং প্রমাণ বিচ্যুতি $(\sigma)=\sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2}{n}}$,

যেখানে, $\frac{\sum x_i}{n}=\bar{x}$ (যৌগিক গড়)

(b) পরিসংখ্যাযুক্ত সরল অথবা শ্রেণিবন্ধ রাশিমালার ক্ষেত্রে,

প্রমাণ বিচ্যুতি $(\sigma)=\sqrt{\frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^2}{\text{N}}}$

[যেখানে x_i রাশিমালার (i = 1, 2,....., n) প্রত্যেকের পরিসংখ্যা যথাক্রমে $f_1, f_2, ..., f_n$ বা $f_i\left(i=1,2,...,n\right)$ এবং $\text{N}=\sum f_i$]

বি.দ্র [সমস্যায় যৌগিক গড় সংযুক্ত বলে, প্রমাণ বিচ্যুতি নির্ণয় করলে সংক্ষিপ্ত প্রণালীর আশ্রয় নেওয়া যায়।]

উদা. (4) নিচের সংখ্যাগুলির প্রমাণ বিচ্যুতি (σ) নির্ণয় করুন : 11, 22, 25, 29, 13

সমাধান ঃ এক্ষেত্রে, যৌগিক গড় $(\bar{x})=\frac{11+22+25+19+13}{5}=\frac{90}{5}=18$

চলকের মান সমূহ (x_i)	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$
11	11 – 18 = – 7	$(-7)^2 = 49$
22	22 – 18 = 4	$(4)^2 = 16$
25	25 – 18 = 7	$(7)^2 = 49$
19	19 – 18 = 1	$(1)^2 = 1$

13	13 – 18 = – 5	$(-5)^2 = 25$
মোট		$\sum(x_i - \overline{x})^2 = 140$

$$\therefore \text{ নির্ণেয় প্রমাণ বিচ্যুতি } (\sigma) = \sqrt{\frac{(x_i - \overline{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{140}{5}} = \sqrt{28} = 5{\cdot}29 \text{ (আসন্ন)}$$

উ. 5·29

অন্য ভাবে,

সংক্ষিপ্ত প্রণালীতে (কল্পিত গড় এর সাহায্যে) ‘σ’ নির্ণয় করা।

চলকের মানসমূহ (x_i)	**$D_i = x_i - A$,** **ধরি, A = 19 (কল্পিত গড়)**	**$D_i^2 = (x_i - A)^2$** **$= (x_i - 19)^2$**
11	11 – 19 = – 8	$(-8)^2 = 64$
22	22 – 19 = 3	$(3)^2 = 9$
25	25 – 19 = 6	$(6)^2 = 36$
19	19 – 19 = 0	$(0)^2 = 0$
13	13 – 19 = – 6	$(-6)^2 = 36$
মোট	$\sum D_i = 9 - 14 = -5$	$\sum D_i^2 = 145$

$$\therefore \text{ নির্ণেয় প্রমাণ বিচ্যুতি } (\sigma) = \sqrt{\frac{\sum D_i^2}{n} - \left(\frac{\sum D_i}{n}\right)^2} \text{ (সূত্র)}$$

$$= \sqrt{\frac{145}{5} - \left\{\frac{(-5)}{5}\right\}^2}$$

$$= \sqrt{29 - (-1)^2} = \sqrt{29 - 1} = \sqrt{28}$$

$$= 5{\cdot}29 \text{ (আসন্ন)}$$

উ. 5·29

এস্থলে, A = 19 (কল্পিত গড়), i = 1, 2, 3, 4, 5

উদা. (5)

প্রাপ্ত নম্বর (x_i)	**ছাত্র সংখ্যা** (f_i)	$D_i = x_i - A$ $= x_i - 70$	D_i^2	f_iD_i	$f_iD_i^2$
64	5	64 – 70 = – 6	$(-6)^2 = 36$	5 × –6 = –30	5 × 36 = 180
A (70)	10	70 – 70 = 0	$(0)^2 = 0$	10 × 0 = 0	10 × 0 = 0
80	12	80 – 70 = 10	$(10)^2 = 100$	12 × 10 = 120	12 × 100 = 1200
90	3	90 – 70 = 20	$(20)^2 = 400$	3 × 20 = 60	3 × 400 = 1200
মোট	$N = \sum f_i$ $= 30$	–	–	$\sum f_iD_i = 150$	$\sum f_iD_i^2 = 2580$

$$\therefore \text{ নির্ণেয় } (\sigma) = \sqrt{\sum \frac{f_iD_i}{N} - \sum\left(\frac{f_iD_i}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{2580}{30} - \left(\frac{150}{30}\right)^2}$$

$$= \sqrt{86 - (5)^2} = \sqrt{86 - 25} = \sqrt{61} = 7{\cdot}81 \text{ (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত)}$$

উ. 7·81

উদা. (6) প্র. 'অতি সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি'তে 'σ' নির্ণয় করুন :—

চলরাশির শ্রেণি	**শ্রেণির মধ্যমান (x_i) i = 1,2,...,7**	**পরিসংখ্যা (f_i)**	**A = –5, h = 10** $u_i = \dfrac{x_i - A}{h}$	f_iu_i	$f_iu_i^2$
(–40) – (–30)	–35	10	$\dfrac{-35-(-5)}{10}$ $= -3$	10 × (–3) = –30	10 × $(-3)^2$ = 90
(–30) – (–20)	–25	28	– 2	28 × (–2) = –56	28 × $(-2)^2$ = 112
(–20) – (–10)	–15	30	$\dfrac{-15-(-5)}{10} = -1$	30 × (–1)	30 × $(-1)^2$ = 30

চলরাশির শ্রেণি	**শ্রেণির মধ্যমান (x_i) i = 1,2,...,7**	**পরিসংখ্যা (f_i)**	**A = –5, h = 10** $u_i = \frac{x_i - A}{h}$	**f_iu_i**	**$f_iu_i^2$**
				= 30	
(–10) – 0	–5 (A)	42	$\frac{-5-(-5)}{10}=0$	42 × (0) = 0	42 × $(0)^2$ = 0
0 – 10	5	65	$\frac{5-(-5)}{10}=1$	65 × 1 = 65	65 × $(1)^2$ = 65
10 – 20	15	180	$\frac{15-(-5)}{10}=2$	180 × 2 = 360	180 × $(2)^2$ = 720
20 – 30	25	10	$\frac{-25-(-5)}{10}=3$	10 × 3 = 30	10 × $(3)^2$ = 90
মোট	–	$\text{N} = \sum f_i = 365$	–	$\sum f_iu_i = 339$	$\sum f_iu_i^2 = 1107$

সমাধান ঃ

উপরের তালিকা অনুসারে,

$$\text{প্রমাণ বিচ্যুতি } (\sigma) = \left\{\sqrt{\frac{\sum f_iu_i^2}{\text{N}} - \left(\frac{\sum f_iu_i}{\text{N}}\right)^2}\right\} \times h \text{ (সূত্র)}$$

$$= \left\{\sqrt{\frac{1107}{365} - \left(\frac{339}{365}\right)^2}\right\} \times 10$$

$$= \left(\sqrt{3 \cdot 03 - 0 \cdot 86}\right) \times 10 = 1 \cdot 473 \times 10 = 14 \cdot 73 \text{ (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত)}$$

উ. 14·73

(E) ভেদ সহগ বা ভেদাঙ্ক (Co-efficient of Variation or C.V) :

যে কোন চলরাশির প্রমাণ বিচ্যুতি বা সমক বিচ্যুতি (σ) এবং তার যৌগিক গড় $(\bar{x})$ হলে, চলের ভেদ সহগ বা ভেদাঙ্ক (Co-eff. of Variation) $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$ (যখন $\bar{x} \neq 0$)

উদা. (i)

চলরাশির শ্রেণি বিভাগ	**পরিসংখ্যা**
90 – 99	2
80 – 89	12
70 – 79	22
60 – 69	20
50 – 59	14
40 – 49	4
30 – 39	1

প্রদত্ত তালিকা থেকে ভেদাঙ্ক (C.V) নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

চলরাশির শ্রেণি সীমা (Class limit) of the variable	**চলরাশির শ্রেণি সীমানা (Class boundary of the variable)**	**শ্রেণির মধ্যমান (x) (Mid. Value of the class)**	**(f) পরিসংখ্যা (frequency)**	$u = \frac{x - A}{h}$, **A = 64·5, h = 10**	**fu**	**fu^2**
90 – 99	89·5 – 99·5	94·5	2	$\frac{94 \cdot 5 - 64 \cdot 5}{10}$ = 3	6	18
80 – 89	79·5 – 89·5	84·5	12	2	24	48
70 – 79	69·5 – 79·5	74·5	22	1	22	22
60 – 69	59·5 – 69·5	64·5 (A)	20	0	0	0
50 – 59	49·5 – 59·5	54·5	14	–1	–14	14
40 – 49	39·5 – 49·5	44·5	4	–2	–8	16
30 – 39	29·5 – 39·5	34·5	–1	–3	–3	9
মোট			$N = \sum f = 75$	0	$\sum fu$ = 27	$\sum fu^2$ =127

$$\therefore \bar{x} \text{ (যৌগিক গড়) } = A + \frac{\sum fu}{N} \times h$$

$$= 64{\cdot}5 + \frac{27}{75} \times 10$$

$$= 64{\cdot}5 + 3{\cdot}6$$

$$= 68{\cdot}1$$

$$\text{এবং } \sigma \text{ (প্রমাণ বিচ্যুতি) } = \left\{ \sqrt{\frac{\sum fu^2}{N} = \left(\frac{\sum fu}{N} \right)^2} \right\} \times h$$

$$= \left\{ \sqrt{\frac{127}{75} - \left(\frac{27}{75} \right)^2} \right\} \times 10$$

$$= \left(\sqrt{1{\cdot}6933 - 0{\cdot}1296} \right) \times 10 = 1{\cdot}2505 \times 10$$

$$= 12{\cdot}505$$

$$= 12{\cdot}5 \text{ (দশমিকের পর 1 ঘর পর্যন্ত)}$$

$$\therefore \text{ নির্ণেয় ভেদাঙ্ক } (C{\cdot}V) = \frac{68{\cdot}1}{12{\cdot}5}$$

$$= 5{\cdot}4$$

উত্তর : 5·4

বি.দ্র. (i) ভেদাঙ্কের সাহায্যে বিস্তৃতির আপেক্ষিক পরিমাপকে সুন্দর ভাবে প্রকাশ করা যায় এটি একটি সুসংহত সংজ্ঞা স্বরূপ।

(ii) ভেদমান (Variance) = σ^2 (সমক পার্থক্যের বর্গ) রাশিবিজ্ঞানের কর্ণধার R·A· Fisher 1913 সালে এর সংজ্ঞা নির্ধারণ করেন।

(F) গড় বিস্তারাঙ্ক (Co-efficient of mean deviation)

গড় পার্থক্যের পরিপ্রেক্ষিতে বিস্তৃতির আপেক্ষিক পরিমাপকে বলা হয় গড় বিস্তারাঙ্ক (Co-efficient of mean deviation)।

গাণিতিক ভাবে, গড় বিস্তারাঙ্ক = $\frac{\text{যৌগিক গড় থেকে গড় পার্থক্য}}{\text{যৌগিক গড়}}$

বি.দ্র. গড় বিস্তারাঙ্ক মধ্যমা থেকেও নির্ণয় করা হয়।

সেক্ষেত্রে, গড় বিস্তারাঙ্ক = $\frac{\text{মধ্যমা থেকে গড় পার্থক্য}}{\text{মধ্যমা}}$ হবে।

উদা. (1) রাশিমালা সরল ভাবে (অর্থাৎ শ্রেণিবন্ধ হলে) বিন্যস্ত হলে নীচের পদ্ধতিতে গড় বিস্তারাঙ্ক নির্ণয় করা হয়।

রাশিমালার মান (x)	**রাশিমালার যৌগিক গড় থেকে ধনাত্মক পার্থক্য বা $\lvert x-\bar{x}\rvert$**
15	$\lvert 15-15\rvert = 0$
20	$\lvert 20-15\rvert = 5$
17	$\lvert 17-15\rvert = 2$
19	$\lvert 19-15\rvert = 4$
21	$\lvert 21-15\rvert = 6$
13	$\lvert 13-15\rvert = \lvert -2\rvert = 2$
12	$\lvert 12-15\rvert = \lvert -3\rvert = 3$
10	$\lvert 10-15\rvert = \lvert -5\rvert = 5$
17	$\lvert 17-15\rvert = \lvert 2\rvert = 2$
9	$\lvert 9-15\rvert = \lvert -6\rvert = 6$
12	$\lvert 12-15\rvert = \lvert -3\rvert = 3$
মোট	$\sum\lvert x-\bar{x}\rvert = 38$

এক্ষেত্রে যৌগিক গড় $(\bar{x}) = \frac{15+20+17+19+21+13+12+10+17+19+12}{11}$

$= \frac{165}{11} = 15$ এবং $n = 11$.

সুতরাং, গড় পার্থক্য বা গড় বিচ্যুতি (Mean deviation) $= \frac{\sum\lvert x-\bar{x}\rvert}{n}$

$$= \frac{38}{11} = 3{\cdot}45$$

∴ নির্ণেয় গড় বিস্তারাঙ্ক (যৌগিক গড় সাপেক্ষে) $= \frac{3{\cdot}45}{15}$

$$= \frac{345}{15 \times 100} = \frac{23}{100} = 0{\cdot}23$$

উত্তর : 0·23.

উদা. (ii) শ্রেণিবন্ধ রাশিমালার ক্ষেত্রে গড় বিস্তারাঙ্ক নির্ণয় করার পদ্ধতি ঃ

রাশিসমূহের শ্রেণি-সীমানা/সীমা	**পরিসংখ্যা (f)**	**মধ্যমান (x)**	fx	$\lvert x - 9{\cdot}2 \rvert = \lvert x - \bar{x} \rvert$	$f\lvert x - \bar{x} \rvert = f\lvert x - 9{\cdot}2 \rvert$
0 – 4	4	2	8	7·2	28·8
4 – 8	6	6	36	3·2	19·2
8 – 12	8	10	80	0·8	6·4
12 – 16	5	14	70	4·8	24·0
16 – 20	2	18	36	8·8	17·6
মোট	$N = \sum f = 25$		$\sum fx = 230$		$\sum f\lvert x - \bar{x} \rvert = 96$

যৌগিক গড় [(A·M)] $(\bar{x}) = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{230}{25} = 9{\cdot}2$

সুতরাং, গড় বিচ্যুতি/গড় পার্থক্য [যৌগিক গড় সাপেক্ষে]

$$= \frac{\sum f\lvert x - \bar{x} \rvert}{\sum f} = \frac{\sum f\lvert x - \bar{x} \rvert}{\text{N}}$$

$$= \frac{96}{25} = 3{\cdot}84$$

∴ নির্ণেয় গড় বিস্তারাঙ্ক (যৌগিক গড়ের প্রেক্ষিতে)

$$= \frac{\text{গড় পার্থক্য (যৌগিক গড় সাপেক্ষে)}}{\text{যৌগিক গড়}}$$

$$= \frac{3{\cdot}84}{9{\cdot}2} = \frac{48}{115} = 0{\cdot}42 \text{ (আসন্ন)}$$

উত্তর : 0·42

বি.দ্র. মধ্যমার সাপেক্ষেও গড় বিস্তারাঙ্ক নির্ণয় করা যায়। এর উদাহরণ পরবর্তী বিবিধ প্রশ্নোত্তর পর্বে দেখানো হয়েছে।

(G) চতুর্থক বিচ্যুতি অঙ্ক (Co-efficient of quartile deviation) : এটিও একটি আপেক্ষিক বিস্তৃতি মাপক। চলরাশির চতুর্থক বিচ্যুতি ও মধ্যমার অনুপাতের শতকরা হারকে বলা হয় **চতুর্থক বিচ্যুতি অঙ্ক** (Co-efficient of quartile deviation)।

গাণিতিক পরিভাষায়,

$$\text{চলকের চতুর্থক বিচ্যুতি অঙ্ক} = \frac{\text{চলের তৃতীয় চতুর্থক} - \text{চলের প্রথম চতুর্থক}}{2 \times \text{মধ্যমা}} \times 100$$

$$= \frac{Q_3 - Q_1}{2 \times \text{মধ্যমা}} \times 100 \ [\text{ যখন চলের মধ্যমা } \neq 0]$$

উদা. (1) 12, 17, 15, 10, 19, 17, 25 সংখ্যাগুলির চতুর্থক বিচ্যুতি অঙ্ক নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ সর্বাগ্রে সংখ্যাগুলিকে (প্রদত্ত) মানের উর্দ্ধক্রমে সাজিয়ে পাই,

7, 10, 12, 15, 17, 19, 25.

এক্ষেত্রে, $n = 7$; $\left(\frac{n+1}{4}\right)$-তম স্থানে অবস্থিত সংখ্যার মান $=\left(\frac{7+1}{4}\right)$ বা দ্বিতীয় স্থানে অবস্থিত সংখ্যার মান = 10

$\therefore$ প্রথম চতুর্থক $(Q_1) = 10$.

অনুরূপে, দ্বিতীয় চতুর্থক $(Q_2) = 2\left(\frac{n+1}{4}\right)$ বা $\left(\frac{n+1}{2}\right)$-তম স্থানে অবস্থিত সংখ্যার মান $=\left(\frac{7+1}{2}\right)$ বা চতুর্থ স্থানাধিকারী সংখ্যার মান = 15

সুতরাং মধ্যমা $(Q_2) = 15$.

তৃতীয় চতুর্থক $(Q_3) = \frac{3}{4}(n+1)$ বা $\frac{3}{4}(7+1)$ বা $\left(\frac{3}{4}\times 8\right)$

= ষষ্ঠ স্থানে অবস্থিত সংখ্যার মান

= 19.

∴ নির্ণেয় চতুর্থক বিচ্যুতি-অঙ্ক

$$=\left(\frac{Q_3-Q_1}{2\times Q_2}\right)\times 100$$

$$=\left(\frac{19-10}{2\times 15}\right)\times 100$$

$$=\frac{9}{30}\times 100=\frac{3}{10}\times 100$$

= 30

উত্তর : 30.

উদা. (ii) নীচের তালিকা থেকে চতুর্থক বিচ্যুতি অঙ্ক নির্ধারণ করুন।

চলের মান	পরিসংখ্যা	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা
10	5	5
15	10	5 + 10 = 15
20	16	15 + 16 = 31
25	20	31 + 20 = 51
30	14	51 + 14 = 65
35	8	65 + 8 = 73
40	4	73 + 4 = 77

সমাধান ঃ এস্থলে $N=5+10+16+20+14+8+4$

= 77

∴ প্রথম চতুর্থক (Q_1) = চলের $\left(\frac{N+1}{4}\right)$ বা $\frac{77+1}{4}$ বা $\frac{78}{4}$ বা $\frac{39}{2}$ বা 19·5 -তম স্থানে অবস্থিত সংখ্যার মান

= চলের 20-তম স্থানে অবস্থিত সংখ্যার মান (পরবর্তী পূর্ণ সংখ্যা রূপান্তরিত করে)

= 20 (ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা তালিকা অনুসারে চলকের মান)

অনুরূপে, Q_2 (মধ্যমা/দ্বিতীয় চতুর্থক)

= চলের $2\left(\frac{N+1}{4}\right)$-তম স্থানে স্থিত সাংখ্য মান

= $2\left(\frac{77+1}{4}\right)$-তম স্থানে স্থিত সাংখ্য মান

$=\frac{78}{2}$ -তম স্থানে স্থিত সাংখ্য মান

= 39-তম স্থানে স্থিত সাংখ্য মান

= 25 (ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা তালিকা অনুসারে চলকের মান)

Q_3 (তৃতীয় চতুর্থক) = চলের $\left[3\left(\frac{N+1}{4}\right)\right.$ বা $3\left(\frac{77+1}{4}\right)$ বা $\frac{234}{4}$ বা 58·5]-তম স্থানে স্থিত সাংখ্য মান

= চলের 59 -তম স্থানে স্থিত সাংখ্য মান

= 30 [ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা তালিকা থেকে প্রাপ্ত চলের মান]

সুতরাং, নির্ণেয় গড় বিস্তারাঙ্ক

$$=\left\{\frac{Q_3-Q_1}{2\times Q_2}\right\}\times 100 \text{ (সূত্র)}$$

$$=\left\{\frac{30-20}{2\times 25}\right\}\times 100$$

$$=\left\{\frac{10}{2\times 25}\right\}\times 100=(10\times 2)=20$$

উ. 20

(H) (a) কেন্দ্রীভবন রেখা বা লরেঞ্জ রেখা (Lorenz Curve)

সম্পদ বা আয় সম্পর্কিত পর্যবেক্ষণ কালে সম্পদ বণ্টনের ক্ষেত্রে বৈষম্য চিত্র লক্ষিত হয়। সেজন্য সম্পদের কেন্দ্রিকতা গামিতা বিষয়ে সবিশেষ জ্ঞান অর্জনের তাগিদে বিশেষ এক প্রকার ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখার ব্যবহার নজরে আসে। একেই কেন্দ্রাভিমুখী রেখা বা লরেঞ্জ রেখা হিসাবে অভিহিত করা হয়। Dr. Max. O. Lorenz- এর নামানুসারে এ ধরনের লেখচিত্রের নাম হয়েছে লরেঞ্জ রেখা।

গণনা কার্য ঃ

ধরি, X চলকের x মান পর্যন্ত ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (cumulative frequency) এবং মোট পরিসংখ্যা (frequency) দুটির অনুপাতের শতকরা হার = G (x) এবং X চলকের x মান পর্যন্ত মানের যোগফল এবং মোট মানের যোগফল -এর অনুপাতের শতকরা হার = H (x).

$$\therefore \mathrm{G}(x)=\frac{\sum\limits_{x_i\leq x} f_i}{\sum f_i}\times 100$$

এবং $$\mathrm{H}(x)=\frac{\sum\limits_{x_i\leq x} f_i x_i}{\sum f_i x_i}\times 100$$

এক্ষেত্রে, $0\leq \mathrm{G}(x)\leq 100$ এবং $0\leq \mathrm{H}(x)\leq 100$

এখন ছক কাগজের সমতলে অনুভূমিক রেখা বা x অক্ষ বরাবর G (x) -কে এবং উলম্ব রেখা বা y অক্ষ বরাবর H (x) -কে নির্ধারণ করে মূলবিন্দু (0, 0) সাপেক্ষে x -এর বিভিন্ন মানের জন্য (G (x), H (x)) বিন্দুগুলিকে যথাযথ স্থানে প্রতিস্থাপিত করে প্রাপ্ত বিন্দুসমূহকে মুক্ত হস্তাঙ্কিত মসৃণ রেখার মাধ্যমে সংযুক্ত করে যে লেখচিত্র পাওয়া যায় তাকেই বলা হয় **'লরেঞ্জ রেখা'**। বিশেষ ক্ষেত্রে, যখন G (x) = H (x) হয়, তখন লেখচিত্রটি একটি সরলরেখায় রূপান্তরিত হয়। একে 'সমবণ্টন রেখা', বা 'line of equal distribution' বা 'egalitarian line' হিসাবে চিহ্নিত করা হয়। যখন সম্পদ বা আয়ের বণ্টনে কোনো প্রকার বৈষম্য বা প্রভেদ লক্ষ করা যায় না তখনই 'লরেঞ্জ রেখা'র দেখা মেলে একটি সরলরেখার আকারে [কারণ এক্ষেত্রে সর্বদা G (x) = H (x)]।

উদাহরণস্বরূপ, কোনো একটি বিশেষ শহরের (ধরা যাক বর্ধমান) ক্ষেত্রে সম্পদ বা আয় বণ্টনের বেলায় G (x) = H (x) থাকলে শহরটির 30% বাসিন্দা শহরের সমগ্র আয়ের 30% ভোগ করেন, শহরের 60% বাসিন্দা শহরটির সমগ্র আয়ের 60% ভোগ করেন, শহরের 70% বাসিন্দা শহরটির সমগ্র আয়ের 80% ভোগ করেন ইত্যাদি।

এখন কেন্দ্রীভবন রেখা বা লরেঞ্জ রেখা এবং সমবণ্টন রেখা দুটির মাধ্যমে যে অঞ্চলটি ঘেরা থাকে তাকেই বলা হয় **'কেন্দ্রিকতার অঞ্চল'** (area of concentration)। ইহা কেন্দ্রীভবনের মাত্রা স্থির করে। সেজন্য সমনিবেশী রেখার থেকে কেন্দ্রীভবন রেখা বা লরেঞ্জ রেখা যত দূরে থাকে ততই কেন্দ্রীভবন অঞ্চলের ক্ষেত্রফল বেড়ে যায়। ফলত: বণ্টন বৈষম্যও বাড়তে থাকে। সেক্ষেত্রে, সামগ্রিকভাবে আয় বা সম্পদের বেশির ভাগই মুষ্টিমেয় জনগণের কাছে কেন্দ্রীভূত হতে থাকে। তাই কেন্দ্রীভবন-অঞ্চলের ক্ষেত্রফল হয়ে উঠে কেন্দ্রীভবনের পরিমাপক। 2 [কেন্দ্রীভবন অঞ্চলের ক্ষেত্রফল] কে **'গিনির কেন্দ্রীভবন-অঙ্ক'** (Gini's Co-efficient of Concentration) হিসাবে সূচিত করা হয়।

উদাহরণ ঃ

নিচের তথ্যরাশিমালার সাহায্যে "**লরেঞ্জ রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করুন।**

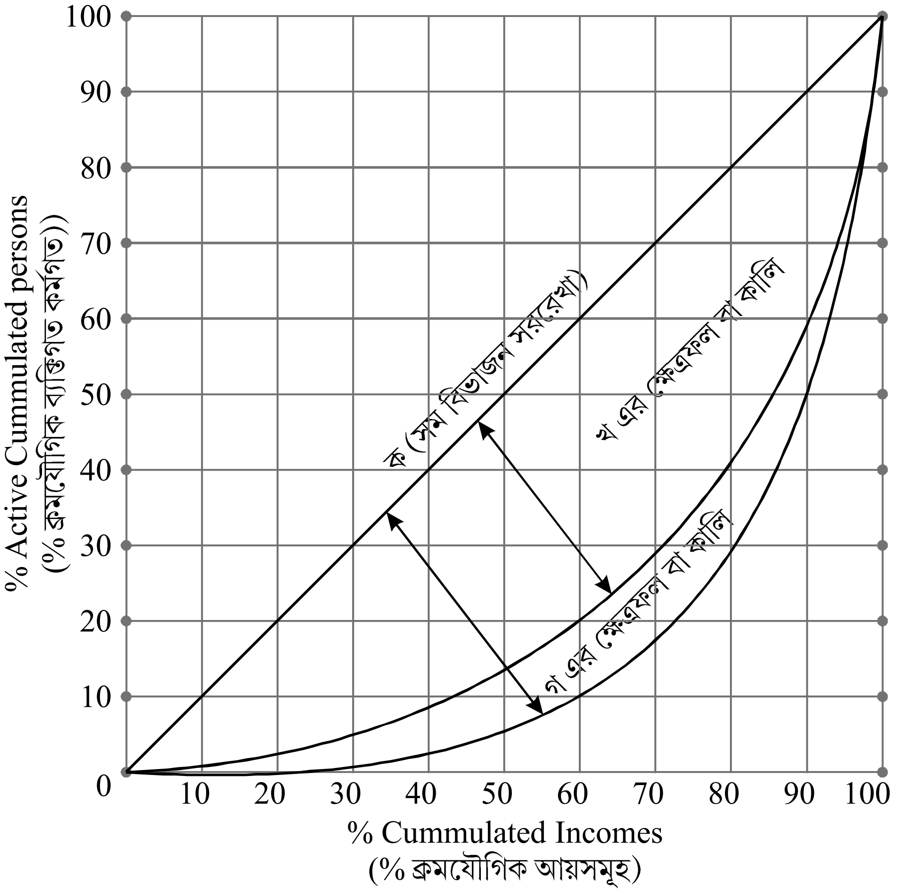
মজুরি বাবদ আয় (প্রতি 1000 টাকায়)	**কর্মরত যন্ত্রচালকের সংখ্যা (প্রতি হাজারে)**		
	বিভাগ—'ক'	**'বিভাগ—'খ'**	**বিভাগ—'গ'**
10	5	8	15
20	10	7	6
40	20	5	2
50	25	3	1
80	40	2	1

সমাধান ঃ প্রদত্ত তালিকা সাপেক্ষে 'Lorenz Curve' (বা 'লরেঞ্জ রেখা') আঁকার জন্য চলরাশির পরিসংখ্যা (ক্রমযৌগিক) এবং তাদের শতকরা হার সম্বলিত তথ্য (data) প্রয়োজন হবে। লরেঞ্জ রেখার জন্য x-অক্ষ (অনুভূমিক রেখা) -কে সমান 10 টি ভাগে (0 – 100 কে) এবং y–অক্ষ (উলম্ব রেখা) -কে সমান 10 টি ভাগে (0 – 100 কে) বিভক্ত করা হয়। (0, 0) কে মূলবিন্দু হিসাবে চিহ্নিত করা হয়। নীচের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা যুক্ত ছকটি লক্ষণীয়।

আয় (প্রতি 1000 টাকায়)	**আয়ের উপর ক্রমযৌগিক অংশ**	**ক্রমযৌগিক অংশের শতকরা হার (%)**	**যন্ত্রচালক (প্রতি 1000 এ)**	**ক্রমযৌগিক অংশে যন্ত্রচালক**
10	10	$\frac{10}{200}\times 100 = 5$	5	5
20	$30 = (10 + 20)$	$\frac{30}{200}\times 100 = 15$	10	15
40	$70 = (30 + 40)$	$\frac{70}{200}\times 100 = 35$	20	35
50	$120 = (70 + 50)$	$\frac{120}{200}\times 100 = 60$	25	60
80	$200 = (120 + 80)$	$\frac{200}{200}\times 100 = 100$	40	100

ক্রমযৌগিক আয়ের শতকরা হার (%)	যন্ত্রচালক (প্রতি 1000 -এ)	ক্রমযৌগিক অংশের যন্ত্রচালক	ক্রমযৌগিক আয়ের শতকরা হার (%)	যন্ত্রচালক (প্রতি 1000 -এ)	ক্রমযৌগিক অংশের যন্ত্রচালক	ক্রমযৌগিক আয়ের শতকরা হার (%)
5	8	8	32	15	15	60
15	7	15	60	6	21	84
35	5	20	80	2	23	92
60	3	23	92	1	24	96
100	2	25	100	1	25	100

লরেঞ্জ রেখার লেখচিত্র ঃ
(Graph of Lorenz Curve)



বিবিধ উদাহরণমালা ঃ

উদা. (1) যৌগিক গড় সাপেক্ষে নিচের রাশিগুলির গড় পার্থক্য নির্ণয় করুন :

4, 9, 11, 15, 17.

সমাধান ঃ প্রদত্ত চলরাশিগুলির যৌগিক গড় (AM)

$$=\frac{4+9+11+15+17}{2}=\frac{56}{2}=28$$

$\bar{x}$ থেকে চলরাশিগুলির প্রত্যেকটির পার্থক্যের পরম মান (absoute value) হ'ল

$|\ 4-28\ | = |-24\ | = 24$

$|\ 9-28\ | = |-19\ | = 19$

$|\ 11-28\ | = |-17\ | = 17$

$|\ 15-28\ | = |-13\ | = 13$

$|\ 17-28\ | = |-11\ | = 11$

যৌগিক গড় $\bar{x}$ (বা 15) এর সাপেক্ষে চলরাশিগুলির গড় পার্থক্য (mean devation)

$$=\frac{24+19+17+13+11}{5}$$

$$=\frac{84}{5}=16{\cdot}8$$

উ. 16·8

উদা. (2) 12, 48, 30, 94, 90 চলরাশিগুলির (মধ্যমা সাপেক্ষে) গড় পার্থক্য নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ প্রদত্ত চলরাশি গুলিকে মানের উর্দ্ধক্রমে (ascending order of mnagnitude) সাজিয়ে পাই :

12, 30, 48, 90, 94....(1)

এক্ষেত্রে মোট 5 টি রাশি বর্তমান। 5 (অযুগ্ম ধনসংখ্যা), সেজন্য উপরিউক্ত (1) নং, এর $\left(\frac{5+1}{2}\right)$ বা $\left(\frac{6}{2}\right)$ বা তৃতীয় স্থানে স্থিত রাশির মান মধ্যমা হিসাবে গণ্য হবে।

$\therefore$ মধ্যমা (m) = 48

এখন, মধ্যমা *(m)* সাপেক্ষে (1) নং প্রদত্ত রাশিগুলির প্রত্যেকের পার্থক্যের পরম মান হবে

$$| 12 - 48 | = | - 36 | = 36$$

$$| 30 - 48 | = | - 18 | = 18$$

$$| 48 - 48 | = | 0 | = 0$$

$$| 90 - 48 | = | 42 | = 42$$

$$| 94 - 48 | = | 36 | = 36$$

সুতরাং মধ্যমা (m) = 48 সাপেক্ষে প্রদত্ত চলরাশির গড় পার্থক্য $= \frac{36+18+10+42+36}{5}$

$$= \frac{132}{5}$$

$$= 26 \cdot 4$$

উ. 26·4

উদা. (3) প্রদত্ত তালিকা থেকে গড় পার্থক্য নির্ণয় (যৌগিক গড় সাপেক্ষে) করুন।

চলরাশি (x)	10	20	30	40	50
পরিসংখ্যা (f)	5	3	2	4	1

সমাধান ঃ গণনা কার্যের সারণি ঃ

চলরাশি (x)	**পরিসংখ্যা (f)**	fx	$\lvert x-\bar{x}\rvert$	$f\lvert x-\bar{x}\rvert$
10	5	5 × 10 = 50	| 10 – 25 | = 15	5 × 15 = 75
20	3	3 × 20 = 60	| 60 – 25 | = 35	3 × 35 = 105
30	2	2 × 30 = 60	| 60 – 25 | = 35	2 × 35 = 70
40	4	4 × 40 = 160	| 160 – 25 | = 135	4 × 135 = 540
45	1	1 × 45 = 45	| 45 – 25 | = 20	1 × 20 = 20
মোট	$\sum f = 15$	$\sum fx = 375$	—	$\sum f\lvert x-\bar{x}\rvert = 810$

এক্ষেত্রে, যৌগিক গড় $\left(\bar{x}\right) = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{375}{15} = 25$

∴ নির্ণেয় গড় পার্থক্য (যৌগিক গড় সাপেক্ষে) $= \dfrac{\sum f|x-\bar{x}|}{\sum f}$

$$= \frac{810}{15} = \frac{162}{3} = 54.$$

উ. 54

উদা. (4)

চলক (x)	2	4	6	8	10	12
পরিসংখ্যা (f)	3	7	4	5	2	3

প্রদত্ত তালিকা অনুসারে মধ্যমা সাপেক্ষে গড় বিচ্যুতি নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

চলক (x)	**পরিসংখ্যা (f)**	**ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা**	$x - m$	$\|x - m\|$	$f\|x - m\|$
2	3	3	$2-6=-4$	$\|-4\| = 4$	$3 \times 4 = 12$
4	7	$7 + 3 = 10$	$4 - 6 = -2$	$\|-2\| = 2$	$4 \times 2 = 8$
6	4	$4 + 10 = 14$	$6 - 6 = 0$	$\|0\| = 0$	$4 \times 0 = 0$
8	5	$5 + 14 = 19$	$6 - 8 = -2$	$\|2\| = 2$	$5 \times 2 = 10$
10	2	$19 + 2 = 21$	$10 - 6 = 4$	$\|4\| = 4$	$2 \times 4 = 8$
12	3	$21 + 3 = 24$	$12 - 6 = 6$	$\|6\| = 6$	$3 \times 6 = 18$
মোট	$\mathrm{N} = \sum f = 24$	–	–	–	$\sum f\|x-m\| = 56$

এস্থলে, $\mathrm{N} = \sum f = 24$ (যুগ্ম সংখ্যা)

$$\frac{\mathrm{N}}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

$$\frac{\mathrm{N}}{2} + 1 = 12 + 1 = 13$$

সুতরাং 12-তম এবং 13-তম পদের গড় মান হবে মধ্যমা। ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা তালিকা থেকে লক্ষণীয় যে 12-তম এবং 13-তম স্থানে চলকের মান যথাক্রমে 6 এবং 6।

∴ মধ্যমা $(m) = \dfrac{6+6}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$

সুতরাং নির্ণেয় গড় বিচ্যুতি (মধ্যমা সাপেক্ষে)

$$=\frac{\sum f|x-m|}{\sum f}=\frac{56}{24}=\frac{7}{3}=2{\cdot}33$$ (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত)

উ. 2·33

উদা. (5) শ্রেণিবদ্ধ চলরাশির পরিসংখ্যা বিভাজন ছক থেকে গড় বিচ্যুতি নির্ণয় করুন (যৌগিক গড় সাপেক্ষে) ঃ

10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
2	3	5	7	3

সমাধান ঃ এক্ষেত্রে আমরা গড় বিচ্যুতি নির্ণয়ের জন্য কল্পিত গড়ের সাহায্যে সংক্ষিপ্ত প্রণালী অনুসরণ ক'রব।

শ্রেণি বিভাগ	পরিসংখ্যা (f)	মধ্যবিন্দু (x)	$u=\frac{x-A}{h}$, A = 35, h = 10	fu	$\lvert x-\bar{x}\rvert$	$f\lvert x-\bar{x}\rvert$
10 – 20	2	15	$\frac{15-35}{10}=-2$	–4	| –23 | = 23	2 × 23 = 46
20 – 30	3	25	$\frac{25-35}{10}=-1$	–3	| –13 | = 13	3 × 13 = 39
30 – 40	5	35 (A)	$\frac{35-5}{10}=0$	0	| –3 | = 3	5 × 3 = 15
40 – 50	7	45	$\frac{45-35}{10}=1$	7	| 7 | = 7	7 × 7 = 49
50 – 60	3	55	$\frac{55-35}{10}=2$	6	| 17 | = 17	3 × 17 = 51
মোট	$N=\sum f=20$	—	—	$\sum fu=6$	—	$\sum f\lvert x-\bar{x}\rvert$ = 200

এক্ষেত্রে, কল্পিত গড় (A) = 35. শ্রেণি দৈর্ঘ্য (h) = 10

$\bar{x}$ (যৌগিক গড়) $=A+\frac{\sum fu}{N}\times h$

$$=35+\left(\frac{6}{20}\times 10\right)$$

$= 35 + 3 = 38$

∴ নির্ণেয় গড় বিচ্যুতি (যৌগিক গড় সাপেক্ষে)

$$= \frac{\sum f|x-\bar{x}|}{\sum f}$$

$$= \frac{200}{20} = 10$$

উ. 10

উদা. (6) প্রদত্ত তালিকা অনুসারে যৌগিক গড় (AM) এবং প্রমাণ বিচ্যুতি (S.D) নির্ণয় করুন।

চলরাশির শ্রেণি বিভাগ	0–10	10–20	20–30	30–40
পরিসংখ্যা	3	2	3	2

সমাধান ঃ

প্রদত্ত চলরাশির শ্রেণি সীমা থেকে পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটি সর্বপ্রথম প্রস্তুত ক'রলাম।

গণনা কার্য ঃ

চলকের শ্রেণি সীমা	মধ্যবিন্দু (x)	পরিসংখ্যা (f)	fx	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$f(x-\bar{x})^2$
0 – 10	5	3	15	5 – 19 = –14	$(-14)^2 = 196$	3 × 196 = 588
10 – 20	15	2	30	15 – 19 = –4	$(4)^2 = 16$	2 × 16 = 32
20 – 30	25	3	75	25 – 19 = 6	$(6)^2 = 36$	3 × 36 = 108
30 – 40	35	2	70	35 – 19 = 16	$(16)^2 = 256$	2 × 256 = 512
মোট		$N = \sum f = 10$	$\sum fx = 190$	—	—	$\sum f = (x-\bar{x})^2$ = 1240

এস্থলে যৌগিক গড় $(\bar{x}) = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{\sum fx}{N} = \frac{190}{10} = 19$

∴ নির্ণেয় প্রমাণ বিচ্যুতি $(\sigma) = \sqrt{\frac{\sum f(x-\bar{x})^2}{N}}$

$$=\sqrt{\frac{1240}{10}}=\sqrt{124}=11{\cdot}13$$ (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত)

উ. $11{\cdot}13$

উদা. (7) নিচের প্রদত্ত তালিকা থেকে মধ্যমা নির্ণয় করুন এবং ঐ মধ্যমা সাপেক্ষে গড় পার্থক্য নির্ণয় করুন ঃ

শ্রেণি বিভাগ	16–20	21–25	26–30	31–35	36–40	41–45	46–50	51–55
পরিসংখ্যা	5	6	12	14	26	12	16	9

সমাধান ঃ

প্রদত্ত চলের বিভাজন (পরিসংখ্যা) ছকে চলের শ্রেণি সীমা (class limit) দেওয়া আছে। কিন্তু, মধ্যমা (median) নির্ণয় কালে চলের শ্রেণি সীমানা (class boundary) -তে রূপান্তর প্রয়োজন। সে কারণে নীচের চলের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটিকে লক্ষ ক'রতে হবে।

চলকের শ্রেণি সীমা	**চলের শ্রেণি সীমা**	**পরিসংখ্যা (f)**	**ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা**	**শ্রেণির মধ্যমান (x)**	**$\lvert x-m\rvert$, $m = 38$**	**$f\lvert x-m\rvert$**
16 – 20	15·5 – 20·5	5	5	18	|18–38| = |–20| = 20	5 × 20 = 100
21 – 25	20·5 – 25·5	6	5 + 6 = 11	23	|23–38| = 15	6 × 15 = 90
26 – 30	25·5 – 30·5	12	11 + 12 = 23	28	|28–38| = 10	12 × 10 = 120
31 – 35	30·5 – 35·5	14	23 + 14 = 37 (F)	33	|33–38| = 5	14 × 5 = 70
36 – 40	35·5 – 40·5	26	37 + 26 = 63	38	|38–38| = 0	26 × 0 = 0
41 – 45	40·5 – 45·5	12	63 + 12 = 75	43	|43–38| = 5	12 × 5 = 60
46 – 50	45·5 – 50·5	16	75 + 16 = 91	48	|48–38| = 10	16 × 10 = 160
51 – 55	50·5 – 55·5	9	91 + 9 = 100	53	|53–38| = 15	9 × 15 = 135
—	—	$N=\sum f=100$	—	—	—	$\sum f\lvert x-m\rvert=735$

এক্ষেত্রে, $N=\sum f=100$

সুতরাং $\frac{N}{2}=50$ ∴ ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা তালিকা অনুসারে, মধ্যমা শ্রেণি সীমানা হিসাবে 33·5–40·5 কে ধরতে হবে।

$$\therefore \text{ মধ্যমা } (m)=35{\cdot}5+\left\{\frac{(50-37)}{26}\right\}\times 5$$ [মধ্যমা সূত্র থেকে]

$$= 35{\cdot}5 + \left(\frac{13 \times 5}{26}\right)$$

$$= 35{\cdot}5 + \frac{5}{2} = 35{\cdot}5 + 2{\cdot}5 = 38$$

এখন গড় পার্থক্য (মধ্যমা সাপেক্ষে)

$$= \frac{\sum f\,|x - m|}{\mathrm{N}} = \frac{735}{100} = 7{\cdot}35$$

উ. 7·35

উদা. (8) একটি কারখানায় 25 জন শ্রমিকের মাসিক মূল বেতনের যৌগিক গড় 350 টাকা ও প্রমাণ বিচ্যুতি 50 টাকা। ঐ কারখানায় নতুনভাবে 5 জন শ্রমিক যোগদান ক'রলেন, প্রত্যেকের মূল মাসিক বেতন ছিল যথাক্রমে 260 টাকা, 300 টাকা, 320 টাকা, 490 টাকা এবং 590 টাকা। মোট 30 জন শ্রমিকের মূল মাসিক বেতনের যৌগিক গড় ও প্রমাণ বিচ্যুতি নির্ণয় করুন।

[এ সমস্যাটি সমাধানের পূর্বে নিম্নোক্ত সংক্ষিপ্ত আলোচনাটি প্রয়োজন।]

ধরি, n_1 সংখ্যক চলের যৌগিক গড় $\bar{x}_1$ এবং প্রমাণ বিচ্যুতি σ_1 এবং অপর এক জাতীয় n_2 সংখ্যক চলের যৌগিক গড় $\bar{x}_2$ এবং প্রমাণ বিচ্যুতি σ_2। এখন মোট $(n_1 + n_2)$ সংখ্যক চলের যৌগিক গড় $\bar{x}$ এবং প্রমাণ বিচ্যুতি σ হলে, সংযুক্তিকরণ পদ্ধতিতে

$$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

এবং $\sigma^2 = \dfrac{n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2 + n_1 d_1^2 + n_2 d_2^2}{n_1 + n_2}$

যখন $\bar{x}_1 - \bar{x} = d_1$ এবং $\bar{x}_2 - \bar{x} = d_2$]

সমাধান ঃ প্রশ্নমতে, প্রথম 25 জন শ্রমিকের বেলায় $n_1 = 25$, $\bar{x}_1 = 350$ টাকা এবং $\sigma_1 = 50$ টাকা। পরবর্তী ক্ষেত্রে 5 জন অতিরিক্ত শ্রমিকের বেলায় $n_2 = 5$, সেজন্য

$$\bar{x}_2 = \frac{260 + 300 + 320 + 490 + 590}{5} = \frac{1960}{5} = 392 \text{ টাকা}$$

প্রমাণ বিচ্যুতি (σ_2) হওয়ায়

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{5}\left\{(260-392)^2 + (300-392)^2 + (320-392)^2 + (490-392)^2 + (590-392)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{5}(17424 + 8464 + 5184 + 9604 + 39204)$$

$$= \frac{1}{5} \times 79880 = 15976$$

$$\therefore \sigma_2 = \sqrt{16976} = 126{\cdot}4$$

ধরি, 30 জন শ্রমিক মূল বেতনের যৌগিক গড় $= \bar{x}$ টাকা এবং প্রমাণ বিচ্যুতি σ টাকা।

$$\therefore \bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

$$= \frac{25 \times 350 + 5 \times 392}{25 + 5} = \frac{3750 + 1960}{30}$$

$$= \frac{10710}{30} \Rightarrow \bar{x} = 357$$

সুতরাং 30 জন শ্রমিকের মূল বেতনের যৌগিক গড় = 357 টাকা

এখন, $\sigma^2 = \dfrac{n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2 + n_1d_1^2 + n_2d_2^2}{n_1 + n_2}$,

যখন $d_1 = 350 - 357 = -7$

এবং $d_2 = 392 - 357 = 35$

$$= \frac{25 \times 50^2 + 5 \times (126{\cdot}4)^2 + 25 \times (-7)^2 + 5 \times (35)^2}{25 + 5}$$

$$= \frac{62500 + 79884{\cdot}8 + 1225 + 6125}{30}$$

$$= \frac{149734{\cdot}8}{30} = 4991{\cdot}16$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{4991{\cdot}16} = 70{\cdot}65$$

সুতরাং 30 জন শ্রমিকের মূল বেতনের প্রমাণ বিচ্যুতি = 70·65

$\therefore$ নির্ণেয় 30 জন শ্রমিকের মূল মাসিক বেতনের যৌগিক গড় = 357 টাকা এবং প্রমাণ বিচ্যুতি = 70·65 টাকা। **(উত্তর)**

উদা. 9 10 জন ছাত্রের মধ্যে একজন শারীরিকভাবে অক্ষম ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বর অন্যান্য 9 জন ছাত্রের গড় নম্বর অপেক্ষা 15 কম। প্রমাণ করুন যে সকল ছাত্রের নম্বরের প্রমাণ বিচ্যুতি 4·5 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হতে পারে না।

সমাধান ঃ ধরি, ছাত্র দল দুটি ভাগে বিভক্ত; প্রথম বিভাগে শারীরিকভাবে অক্ষম ছাত্রটি অন্তর্ভূক্ত এবং দ্বিতীয় বিভাগে বাকি 9 জন ছাত্র বর্তমান। যদি প্রথম বিভাগ, দ্বিতীয় বিভাগ এবং সমস্ত ছাত্রদের প্রাপ্ত নম্বরের গড় যথাক্রমে $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ এবং $\bar{x}$ হয় তবে শর্তানুসারে, $\bar{x}_2 - \bar{x}_1 = 15$ বা, $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - 15....(1)$

গড়ের ‘সংযুক্তিকরণ পদ্ধতি’ অনুসারে

$$10\bar{x} = 1\cdot\bar{x}_1 + 9\bar{x}_2 = \bar{x}_1 + 9\bar{x}_2$$

বা, $10\bar{x} = \bar{x}_2 - 15 + 9\bar{x}_2$ ((1) নং থেকে)

বা, $10\bar{x} = 10\bar{x}_2 - 15$

বা, $\bar{x} = \bar{x}_2 - 1\cdot5$ [উভয় পক্ষকে 10 দিয়ে ভাগ করে]....(2)

পুণরায়, প্রথম বিভাগ, দ্বিতীয় বিভাগ ও সমস্ত ছাত্রদের প্রমাণ বিচ্যুতি σ_1, σ_2 এবং σ হলে, ‘সংযুক্তিকরণ’ পদ্ধতি অনুসারে—

$$10\sigma^2 = 1\times0 + 9\times\sigma_2^2 + 1(\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + 9(\bar{x}_2 - \bar{x})^2$$

$= 9\sigma_2^2 + 1(\bar{x}_2 - 15 - \bar{x}_2 + 1\cdot5)^2 \left(\therefore \sigma_1^2 = 0\right) + 9(1\cdot5)^2$ [(1) ও (2) এর মাধ্যমে]

$$= 9\sigma_2^2 + (-13\cdot5)^2 + 9(1\cdot5)^2$$

$$= 9\sigma_2^2 + 182\cdot25 + 20\cdot25$$

$$= 9\sigma_2^2 + 202\cdot50$$

বা, $\sigma^2 = 0\cdot9\sigma_2^2 + 20\cdot25$

$$= (4\cdot5)^2 + 0\cdot9\sigma_2^2$$

$$\therefore \sigma \geq 4{\cdot}5 \left(\therefore \sigma_2^2 \nleq 0\right)$$

সুতরাং সমস্ত ছাত্রদের নম্বরের প্রমাণ বিচ্যুতি 4·5 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হতে পারে না। (প্রমাণিত)

উদা. 10 (a) কতকগুলি চলের গড় মান 20 এবং ভেদাঙ্ক 70% হলে, চলরাশিসমূহের প্রমাণ বিচ্যুতি কত হবে?

সমাধান ঃ এস্থলে, চলরাশিগুলির যৌগিক গড় = 20 এবং ভেদাঙ্ক = 70% ;

ধরি, চলরাশি সমূহের প্রমাণ বিচ্যুতি = σ.

আমরা জানি যে,

$$\sigma = \frac{\text{যৌগিক গড়} \times \text{ভেদাঙ্ক}}{100}$$

$$= \frac{20 \times 70}{100} = \frac{14 \times 100}{100} = 14$$

∴ নির্ণেয় প্রমাণ বিচ্যুতি = 14 **(উত্তর)**

(b) 18 টি পর্যবেক্ষণযুক্ত চলের একটি পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে যৌগিক গড় ও প্রমাণ বিচ্যুতি পাওয়া গেল যথাক্রমে 7 এবং 4। পরবর্তী স্তরে গণনা কার্যে ধরা পড়ল ভুলবশত 12 এর জায়গায় 21 লেখা হয়েছে। চলের যৌগিক গড় ও প্রমাণ বিচ্যুতির সঠিক মান নির্ধারণ ক'রতে হবে।

সমাধান ঃ

প্রদত্ত 18 টি চলরাশির ভুল যৌগিক গড়ের মান = 7. যদি ঐ 18 টি চলকের ত্রুটিযুক্ত যোগফল $= \sum x$ হয় তবে $\frac{\sum x}{18} = 7$

বা, $\sum x = 18 \times 7 = 126$

এই যোগফল চলরাশি 21 -এর জায়গায় সঠিক ভাবে 12 লিখতে হবে।

সুতরাং চলসমূহের সঠিক যোগফল = 126 − 21 + 12

= 138 − 21 = 117

∴ চলের সঠিক যৌগিক গড় $= \frac{117}{18} = 6{\cdot}5$

এখন প্রমাণ বিচ্যুতি সূত্র থেকে পাই

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2;$$

এস্থলে প্রমাণ বিচ্যুতি সূত্র প্রয়োগে পাই,

$$4^2 = \frac{\sum x^2}{18} - (7)^2 \quad \left[\because \frac{\sum x}{18} = 7\right]$$

বা, $\frac{\sum x^2}{18} = (16 + 49)$

বা, $\sum x^2 = 65 \times 18$

বা, $\sum x^2 = 1170$ (এটা ত্রুটিযুক্ত মান)

$\therefore$ সঠিক $\sum x^2$ -এর মান $= 1170 - (21)^2 + (12)^2$

$$= 1170 - 441 + 144$$

$$= 1314 - 441$$

$$= 873$$

সুতরাং, σ^2 এর সঠিক মান

$$= \frac{\sum x^2}{18} - \left(\frac{\sum x}{18}\right)^2$$

$$= \frac{873}{18} - (6 \cdot 5)^2 \left[\because \frac{\sum x}{18} = 6 \cdot 5\right]$$

$$= 48{\cdot}5 - 42{\cdot}25$$

বা, $\sigma = \sqrt{6{\cdot}25} = 2{\cdot}5$

সুতরাং নির্ণেয় সঠিক যৌগিক গড় = 6·5 এবং সঠিক প্রমাণ বিচ্যুতি = 2·5 **(উত্তর)**

প্রশ্নমালা

1. চলের শ্রেণিবন্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকাটি নিম্নরূপ ঃ

চলের মান	10–19	20–29	30–39	40–49	50–59	60–69
পরিসংখ্যা	6	10	16	14	8	4

প্রদত্ত তালিকা থেকে বিস্তার ও বিস্তারাঙ্ক নির্ণয় করুন। (উ. $60, \frac{60}{79}$)

2. নিচের তালিকা থেকে চতুর্থক বিচ্যুতি এবং এর সহগ নির্ণয় করুন :

ছাত্রের ওজন (কেজি)	60	61	62	63	65	70	75	80
ছাত্র সংখ্যা	1	3	5	7	10	3	1	1

(উ. 1·5 কেজি, 0·024)

3. নিচের চলের পরিসংখ্যা বিভাজন ছক থেকে মধ্যমা সাপেক্ষে গড় বিচ্যুতি এবং সংখ্যাগুরু মান সাপেক্ষে গড় বিচ্যুতি নির্ণয় করুন।

(চলরাশির মান সমূহ)

10	15	18	20	20	22	23	25	27	30

(উ. 4·4 ; 4·4)

4. নিম্নলিখিত তালিকা থেকে যৌগিক গড় মান সাপেক্ষে গড় বিচ্যুতি নির্ণয় করুন :

চলের শ্রেণি সীমানা	2–4	4–6	6–8	8–10
পরিসংখ্যা	3	4	2	4

(উ. 1·48)

5. চলের পরিসংখ্যা বিভাজন ছক অনুসারে মধ্যমা সাপেক্ষে গড় বিচ্যুতি নির্ণয় করুন :

শ্রেণি সীমানা	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60
পরিসংখ্যা	6	8	11	18	5	2

(উ. 10·8)

6. প্রমাণ করুন যে দুটি অসম সংখ্যা x_1 এবং x_2 ($x_1 > x_2$) এর ক্ষেত্রে, এদের প্রমাণ বিচ্যুতি, সংখ্যা দুটির পার্থক্যের অর্ধেক।

7. কোন রাশিতথ্যমালায় 100 টি পর্যবেক্ষণে যৌগিক গড় এবং প্রমাণ বিচ্যুতি যথাক্রমে 40 এবং

5। যদি একটি চলকের পর্যবেক্ষণে ভুলবশত: 50 এর জায়গায় 40 লেখা হয় তবে চলরাশিসমূহের সঠিক যৌগিক গড় মান এবং প্রমাণ বিচ্যুতি কত হবে তা স্থির করুন। (উ. 40·1, 5·1)

8. নীচের তালিকা থেকে একটি বিদ্যালয়ের দ্বাদশ শ্রেণির 30 জন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বরের (অংক বিষয়ে) পরিসংখ্যা বিভাজন সাপেক্ষে প্রমাণ বিচ্যুতি নির্ধারণ করুন ঃ

ছাত্রদের প্রাপ্ত নম্বরের শ্রেণি বিভাগ	ছাত্র সংখ্যা
30 – 39	10
40 – 49	7
50 – 59	8
60 – 69	5

(উ. 10·09)

9. নীচের তালিকা অনুযায়ী চলরাশির প্রদত্ত মান ও পরিসংখ্যা থেকে ভেদাঙ্ক নির্ণয় করুন ঃ

চলকের মান	0	1	2	3	4	5	6	7	8
পরিসংখ্যা	1	90	26	59	72	52	29	7	1

(উ. 35·43%)

10. (a) T_1 এবং T_2 দুটি শহরের লোকসংখ্যা এবং তাদের দৈনিক আয়ের তালিকা দেওয়া হ'ল। উভয় শহরের লোকসংখ্যা ও আয়ের সাপেক্ষে 'লরেঞ্জ রেখা' অংকন করে আয়ের বৈষম্যটি তুলে ধরুন।

(**ইঙ্গিত** : T_1 শহরের আয়ের বৈষম্য > T_2 শহরের আয়ের বৈষম্য)

T_1 শহরের ক্ষেত্রে ঃ

লোকসংখ্যা	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
(দৈনিক) আয়ের হিসাব (টাকায়)	75	100	150	225	325	375	450	600	850	1850

T_2 শহরের ক্ষেত্রে ঃ

লোকসংখ্যা	50	70	30	25	100	45	30	80	20	50
(দৈনিক) আয়ের হিসাব (টাকায়)	80	120	60	140	200	200	140	460	120	480

(b) সমবণ্টন সরলরেখা দ্বারা T_1 ও T_2 শহর দুটির কেন্দ্রীভবন অঞ্চলের ক্ষেত্রফল যথাক্রমে 30% এবং 40% হলে, T_1 শহর ও T_2 শহরের গিনির কেন্দ্রীভবনাঙ্কের অনুপাত স্থির করুন।

(উ. 3 : 4)

6.5 পরিঘাত/ভ্রামক, প্রতিবৈষম্য এবং তীক্ষ্ণতা

পূর্বের একাধিক অধ্যায়ে চলের মধ্যগামিতার বিভিন্ন ধর্মাবলি এবং পার্থক্য বা বিচ্যুতি এবং বিস্তৃতি বা প্রসার সম্পর্কে আলোচনা হয়েছে। বর্তমানে এই অধ্যায়ে আমরা চলের বিভিন্ন বৈশিষ্ট্য ও গুণাবলি এবং তাদের পরিমাপ পদ্ধতি নিয়ে সবিশেষ ব্যাখ্যা দেব। প্রথমে আসবে ভ্রামক বা পরিঘাত (moment), পরে প্রতিবৈষম্য (Skewness) ও তীক্ষ্ণতা (Kurtosis) সম্পর্কে আলোচনা থাকবে। 'ভ্রামক' শব্দটি বলবিদ্যায় (mechanics) বহুল প্রচলিত। সেজন্য ঘাতের উচ্চ সূচক এখানে ব্যবহৃত হয়। অনেকে ভ্রামকের পরিবর্তে 'পরিঘাত' শব্দটি চয়ন করেন। পরিঘাত/ভ্রামকসমূহের (moments) বিষয়ে পরিসংখ্যা বা রাশিবিজ্ঞানে কীভাবে আলোকপাত করা হয়েছে তাই এখন আলোচিত হবে।

(A) পরিঘাত বা ভ্রামকের সংজ্ঞা এবং ধর্মাবলি ঃ

ধরি, x চলের বিভিন্ন মান গুলি হ'ল $x_1, x_2, ..., x_n$, A একটি স্বেচ্ছাধীন ধ্রুবরাশি। এখন A সাপেক্ষে x চলের প্রত্যেক মানের বিচ্যুতির r-তম ঘাতের যৌগিক গড় কে x চলের **r-তম 'A কেন্দ্রিক পরিঘাত'** (বা ভ্রামক) হিসাবে গণ্য করা হয়। ইহা m'_r অথবা μ'_r রূপে চিহ্নিত হয়।

সুতরাং, μ'_r (বা m'_r) $= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mathrm{A})^r$

$$= \frac{\sum(x-\mathrm{A})^r}{n} .....(1) \text{ (সংক্ষেপে)}$$

স্বাভাবিকভাবে, $r = 1$ হলে,

μ'_1(বা m'_1) $= \frac{1}{n}\sum(x-\mathrm{A})$ [(1) নং থেকে]

একে A -র সাপেক্ষে প্রথম পরিঘাত (বা ভ্রামক) বলে।

অনুরূপে, $r = 2, 3, 4$ (1) নং তে বসিয়ে আমরা μ'_2, μ'_3, μ'_4 অর্থাৎ দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুর্থ পরিঘাত (বা ভ্রামক) A -র সাপেক্ষে পেতে পারি।

সেক্ষেত্রে, $\mu'_2 = \frac{1}{n}\sum(x-\mathrm{A})^2$, $\mu'_3 = \frac{1}{n}\sum(x-\mathrm{A})^3$ এবং $\mu'_4 = \frac{1}{n}\sum(x-\mathrm{A})^4$

এখন, (1) নং তে $\mathrm{A} = 0$ বসালে আমরা মূলবিন্দুর (Origin) সাপেক্ষে পরিঘাত (বা ভ্রামক) পাব।

এই পরিঘাতকে (বা ভ্রামক) শূন্যকেন্দ্রিক পরিঘাত বা 'moment about zero' বলে। একে 'ν'$_r$ হিসাবে চিহ্নিত করা হয়। ('ν' হ'ল গ্রিক অক্ষর 'নিউ')

$$\therefore \nu_1 = \frac{1}{n}\sum(x-0)\ (r=1)$$

$$= \frac{1}{n}\sum x$$ [মূলবিন্দুর সাপেক্ষে প্রথম পরিঘাত (বা ভ্রামক)]

অনুরূপে, $\nu_2 = \frac{1}{n}\sum(x-0)^2 = \frac{1}{n}\sum x^2$ [মূলবিন্দুর সাপেক্ষে দ্বিতীয় পরিঘাত বা ভ্রামক]

সাধারণভাবে, $\nu_r = \frac{1}{n}\sum(x-0)^r = \frac{1}{n}\sum x^r$ [মূলবিন্দুর সাপেক্ষে r-তম ঘাতের ভ্রামক বা পরিঘাত]

যখন, x চলের n সংখ্যক মান $x_1, x_2, ..., x_n$, তখন $\bar{x}$ (যৌগিক গড়) $= \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum x}{n}$

পুনরায়, (1) নং তে $A = \bar{x}$ বসালে আমরা যৌগিক গড় (বা মধ্যকের) সাপেক্ষে পরিঘাতকে (বা ভ্রামককে) পাই। যাকে μ_r হিসাবে সূচিত করা হয়। [μ হ'ল গ্রিক অক্ষর 'মিউ']

এটা হ'ল r-তম ঘাতের কেন্দ্রীয় পরিঘাত (বা ভ্রামক) (r-th central moment).

$\therefore$ সাধারণভাবে, $\mu_r = \frac{1}{n}\left[\sum(x-\bar{x})^r\right]$ [যৌগিক গড় বা মধ্যক $(\bar{x})$ -এর সাপেক্ষে r-তম ঘাতের পরিঘাত]

সুতরাং, $\mu_1 = \frac{1}{n}\sum(x-\bar{x})^1$

$$= \frac{1}{n}\sum(x-\bar{x})$$

$$= \frac{1}{n}\sum x - \frac{n\bar{x}}{n} = \frac{1}{n}\sum x - \bar{x}$$

$$= \bar{x} - \bar{x} = 0$$ [প্রথম ঘাতের কেন্দ্রীয় পরিঘাত (Central moment)]

$$\mu_2 = \frac{1}{n}\sum(x-\bar{x})^2$$

$= \sigma^2$ [যেখানে 'σ' হ'ল x চলের প্রমাণ বিচ্যুতি]

প্রকৃতপক্ষে, σ^2 কে ভেদমান বা Variance of x বা সংক্ষেপে var *(x)* বলা হয়।

যদি চলক (x) -এর n সংখ্যক মান হয় $x_1, x_2, ..., x_n$ বা x_i (i = 1, 2,...., n) এবং এদের অনুরূপ পরিসংখ্যা হয় $f_1, f_2, ..., f_n$ বা f_i (i = 1, 2,...., n) হয় তবে $\mu_r = \frac{1}{N}\sum f(x-\bar{x})^r$

[r-তম ঘাতের কেন্দ্রীয় পরিঘাত (বা ভ্রামক)]

যেখানে, $\sum_{i=1}^{n} f_i = f_1 + f_2 + ... + f_n = \mathrm{N}$

অনুরূপে, $\mu'_r = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum f\left(x - \mathrm{A}\right)^r$ [r-তম ঘাতের ‘A’ কেন্দ্রিক পরিঘাত বা ভ্রামক]

এবং $\nu'_r = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum f\left(x - 0\right)^r$

$= \frac{1}{\mathrm{N}} \sum fx^r$ [r-তম ঘাতের ‘শূন্য’ কেন্দ্রিক পরিঘাত বা ভ্রামক]

বি.দ্র. (1) যদি শ্রেণিবন্ধ (grouped) চলকের (x) ক্ষেত্রে শ্রেণি সীমার (বা বিভাগের) চলের মধ্যবর্তী মান সমূহ যথাক্রমে $x_1, x_2, ..., x_n$ এবং তাদের অনুরূপ পরিসংখ্যা $f_1, f_2, ..., f_n$ হয় তবে

$\mu'_r = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum f\left(d'\right)^r \times \left(i\right)^r$ [r-তম ঘাতের ‘A’ কেন্দ্রিক পরিঘাত (বা ভ্রামক)]

যেখানে $d' = \frac{x - \mathrm{A}}{i}$, i = সম দৈর্ঘ্য শ্রেণি সীমা

অথবা, শ্রেণি সীমা অসম দৈর্ঘ্যযুক্ত হলে, i কে শ্রেণি দৈর্ঘ্যসমূহের গ.সা.গু হিসাবে ধ’রতে হবে।

একই পদ্ধতিতে, μ_r ও ν_r নির্ণয় করা যায়।

পরিঘাতের ধর্মাবলি ঃ

(2) এস্থলে লক্ষণীয় যে, $\nu_1 = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum fx$ [প্রথম ঘাতের শূন্যকেন্দ্রিক পরিঘাত (বা ভ্রামক)]

$\therefore \nu_1 = \overline{x}$ (x চলের যৌগিক গড়)

(3) μ_2 (দ্বিতীয় ঘাতের কেন্দ্রীয় পরিঘাত বা ভ্রামক)

$= \frac{1}{n} \sum \left(x - \overline{x}\right)^2 = \sigma^2$ [যেখানে σ হ’ল চলকের প্রমাণ বিচ্যুতি]

$\therefore \mu_2 = \sigma^2$

(4) যদি x চলের বিভিন্ন মাপকে ধরি $x_1, x_2, ..., x_n$ এবং x চলকে শূন্য থেকে ‘a’ তে (একটি বিশেষ ধ্রুবক) স্থানান্তরিত করি তবে x চলের প্রত্যেক ক্ষেত্রে বিচ্যুতি হয় $x_1 - a, x_2 - a, ..., x_n - a$; এদের

প্রত্যেককে স্কেল পরিবর্তনের জন্য *‘b’* (ধ্রুবক) দিয়ে ভাগ করলে পাই,

$$\frac{x_1-a}{b},\frac{x_2-a}{b},....,\frac{x_n-a}{b}.$$

ধরি, (চলক) $y_i=\frac{x_i-a}{b}(i=1,2,....,n)$.

সংক্ষেপে, $y=\frac{x-a}{b}.....(1)$

মনে করি, x চলক ও y চলকের ক্ষেত্রে r-তম ঘাতের কেন্দ্রীয় পরিঘাত যথাক্রমে $\mu_r(x)$ এবং $\mu_r(y)$

$$\therefore \mu_r(x)=\frac{1}{n}\left(\sum(x-\overline{x})^r\right)$$

$=\frac{1}{n}\sum\left[(a+by)-(a+b\overline{y})^r\right]$ ((1) ও (2) থেকে)

(1) নং থেকে,

$$\sum x=\sum a+\sum by$$

$$\frac{\sum x}{n}=\frac{\sum a}{n}+\frac{b}{n}\sum y$$

বা, $\overline{x}=\frac{an}{n}+b\overline{y}$

বা, $\overline{x}=a+b\overline{y}....(2)$]

তাহলে $m_r(x)=\frac{1}{n}\sum\left[b(y-\overline{y})\right]^r$

$$=b^r\cdot\frac{1}{n}\left(\sum(y-\overline{y})^r\right)$$

$=b^r\cdot\mu_r(y)$. $\therefore \mu_r(x)=b^r\mu_r(y)$

স্পষ্টত, $\mu_r(x)$, *‘b’* এর মানের উপর নির্ভরশীল কিন্তু *‘a’* এর মানের উপর নির্ভরশীল নয়।

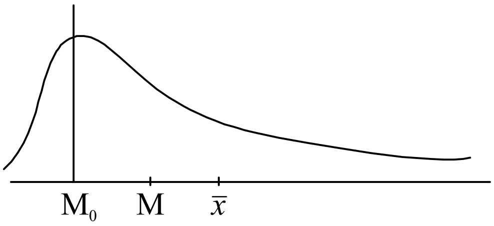
$\therefore$ কেন্দ্রীয় পরিঘাত 'কেন্দ্রীয় মানের' (central values) উপর নির্ভরশীল নয় কিন্তু 'স্কেলের' (Scale) উপর সম্পূর্ণরূপে নির্ভরশীল।

পরিঘাতের গুরুত্ব

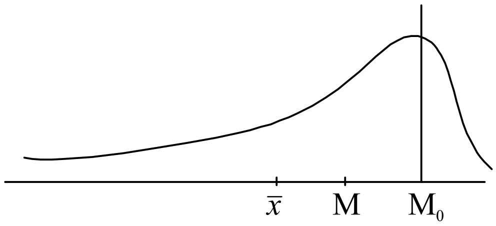
(5) পূর্বেই আমরা লক্ষ করেছি যে মূলবিন্দু সাপেক্ষে প্রাপ্ত প্রথম ভ্রামক $(v_1)=\bar{x}$ (কেন্দ্রীয় প্রবণতা মাপক সংখ্যা বা যৌগিক গড়) এবং মধ্যক (বা যৌগিক গড়) সাপেক্ষে প্রাপ্ত দ্বিতীয় ভ্রামকের ধনাত্মক বর্গমূল অর্থাৎ $\sqrt{\mu_2}=\sigma$ (বিস্তৃতির পরিমাপক সংখ্যা বা প্রমাণ বিচ্যুতি), পরবর্তী স্তরে প্রতিবৈষম্য (Skewness) এবং তীক্ষ্ণতার (Kurtosis) ক্ষেত্রে μ_2, μ_3 ও μ_4 -এর অবদান লক্ষিত হবে। সুতরাং এককথায় বলা যায় যে পরিসংখ্যা বিদ্যায় পরিঘাত বা ভ্রামকের গুরুত্ব অপরিসীম।

(B) প্রতিবৈষম্য (Skewness) ঃ

কোনো পরিসংখ্যা বিভাজনে, যৌগিক গড়, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মান সমান হলে তাকে 'প্রতিসম' বা 'সুসমঞ্জস' বিভাজন হিসাবে ধরা হয়। যে বিভাজনে এই সমতা লক্ষিত হয় না তাকে 'অপ্রতিসম' বা 'অসমঞ্জস' বিভাজন বলা হয়। এই অপ্রতিসমতা থেকে জন্মলাভ করে 'প্রতিবৈষম্য' (Skewness). পরিসংখ্যাবিদ্ 'রিগালম্যান', 'ফিস্‌বী' 'সিম্‌সন্' এবং 'মরিস হামবুর্গ' -এর মতানুসারে কোনো পরিসংখ্যা বিভাজনে যখন সমঞ্জসতার **অভাব** ঘটে তখনই **'প্রতিবৈষম্য'** দেখা যায়। সে কারণে, কোনো পরিসংখ্যা বিভাজনে প্রতিসম বা সমঞ্জস অবস্থা থেকে তার **বিচ্যুতির মাত্রা** নির্দেশককে বলা হয় **'প্রতিবৈষম্য'** (Skewness)। যে সমস্ত গাণিতিক তথ্য রাশি প্রতিবৈষম্যকে পরিমাপে সাহায্য করে তাদের **'প্রতিবৈষম্য মাপক'** বলা হয়। আকৃতিগত পার্থক্যকে লক্ষ করে প্রতিবৈষম্যকে (positive) ধনাত্মক বা (negative) ঋণাত্মক দুটি ভাগে বিভক্ত করা হয়। প্রতি সম বিভাজনে রাশিতথ্য মালায় প্রাপ্ত গড় (যৌগিক) মান, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরুমান প্রত্যেকেই সমান হয়। কিন্তু, যে ক্ষেত্রে গাণিতিক গড় বা যৌগিক গড় মান মধ্যমাও সংখ্যাগুরুমানের চেয়ে বড় হয় অর্থাৎ এস্থলে গাণিতিক গড় $(\bar{x})>$ মধ্যমা (M) $>$ সংখ্যাগুরুমান (M_0)



চিত্র (i)
(ধনাত্মক প্রতিবৈষম্য)



চিত্র (ii)
(ঋণাত্মক প্রতিবৈষম্য)

আকৃতিগতভাবে, পরিসংখ্যা বিভাজন লেখটি চলরাশির মানের (M_0) সাপেক্ষে দীর্ঘাকার লেজ (tail) টি ডান দিকে বিস্তৃত থাকে বলে $\bar{x}$ -এর মান M (মধ্যমা), M_0 (সংখ্যাগুরু মান) এর থেকে বেশী হয়।

একে 'ধনাত্মক প্রতিবৈষম্য' (Positively Skewed) বলে। বিপরীতভাবে, যে রাশিতথ্য মানের বিন্যাসে পরিসংখ্যা বিভাজন রেখাটি বাঁদিকে অধিকমাত্রায় বিস্তার লাভ করে তাকে 'ঋণাত্মক প্রতিবৈষম্য' (negatively Skewed) বলা হয়। এক্ষেত্রে স্পষ্টতই $\bar{x} < M < M_0$ অর্থাৎ গাণিতিক গড় মান মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মান অপেক্ষা অনেকটাই ক্ষুদ্র বা কম। নীচের চিত্রটি লক্ষ করলে পরিস্কারভাবে এটা বোঝা যায়।

চলের বিস্তৃতি (dispersion) মূলত মধ্যক সাপেক্ষে মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মানগুলি কীভাবে 'বিচ্যুতি' ঘটায় তাকে নির্দেশ করে যখন চলের মধ্যকসাপেক্ষে মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মানের 'আকৃতিগত' পরিবর্তনকে তুলে ধরে। অর্থবিদ্যায়, ব্যবসা ক্ষেত্রে বিস্তৃতির মাপক কে, প্রতিবৈষম্য মাপক অপেক্ষা অধিক গুরুত্ব দেওয়া হয় বটে, কারণ, আকৃতিগত দিক থেকে প্রতিবৈষম্য মাপককে আমরা সরাসরি (পরমভাবে) (absolute) ও আপেক্ষিকভাবে পরিমাপ করি বলে।

6.6 প্রতিবৈষম্য পরিমাপের বিবিধ পদ্ধতি

প্রতিবৈষম্য মাপকের উদ্দেশ্য থাকে একটাই, তাহল তথ্যরাশি মানের প্রেক্ষিতে প্রতিসমতা ও অপ্রতিসমতাকে বিচার করা। প্রতিবৈষম্য মাপকের পরম মান অপেক্ষা আপেক্ষিকভাবে নির্ণীত মান এর গুরুত্ব ব্যবহারিক দিকে অনেকাংশে উজ্জ্বল। এ সম্পর্কে কার্ল পিয়ারসনের দুটি পদ্ধতি, বাওলির একটি প্রণালী, কেলির পদ্ধতি, প্রতিঘাত (বা ভ্রামক এর মাধ্যমে 'প্রতিবৈষম্য গুনাংক' (Co-efficient of Skewness) নির্ধারণ করা হয়। নীচে এই পদ্ধতিগুলি আমরা সবিশেষ আলোচনা ক'রব। ব্রিটিশ পরিসংখ্যাবিদ **'কার্ল পিয়ারসন'** আপেক্ষিক 'প্রতিবৈষম্য গুনাংক' হ'ল

(a) (i) $Sk_1 = \dfrac{\text{যৌগিক গড় — সংখ্যাগুরু মান}}{\text{প্রমাণ বিচ্যুতি } (\sigma)}$

(ii) $Sk_2 = \dfrac{3\ (\text{যৌগিক গড় — মধ্যমা})}{\text{প্রমাণ বিচ্যুতি}}$

(b) **'বাওলি' পদ্ধতি ঃ**

এটা মূলত চতুর্থক ও মধ্যমার উপর নির্ভরশীল পদ্ধতি।

[যখন সংখ্যাগুরু মান স্থির করা অসুবিধা থাকে]

এস্থলে,

$$\text{প্রতিবৈষম্য গুনাংক } (Sk_3) = \frac{\{Q_3\ (\text{তৃতীয় চতুর্থক}) + Q_1\ (\text{প্রথম চতুর্থক}) - 2 \times \text{মধ্যমা}\ \}}{Q_3 - Q_1}$$

[যেখানে, $(Q_3 - Q_1) \neq 0$]

(c) **কেলির** প্রতিবৈষম্য গুণাংক নব্বই শততমক (P_{90}), দশম শততমক (P_{10}) এবং মধ্যমার উপর নির্ভরশীল।

$$Sk_4 = \frac{P_{90} + P_{10} - 2 \times \text{মধ্যমা}}{P_{90} - P_{10}}$$

(অবশ্যই $P_{90} - P_{10} \neq 0$)

$$= \frac{D_9 + D_1 - 2 \times \text{মধ্যমা}}{D_9 - D_1}$$

[যখন D_1 = প্রথম দশমক, D_9 = নবম দশকম]

(d) **ভ্রামকের মাধ্যমে ঃ** এখানে প্রতিবৈষম্য গুণাংক স্থির করতে যৌগিক গড় $(\bar{x})$ সাপেক্ষে তৃতীয় ভ্রামক (পরিঘাত) এবং দ্বিতীয় ভ্রামকের সাহায্য লাগে। ∴ প্রতিবৈষম্য গুণাংক $(\beta_1) = \mu_3^2/\mu_2^3$ (β_1 হ'ল বিটা এক)

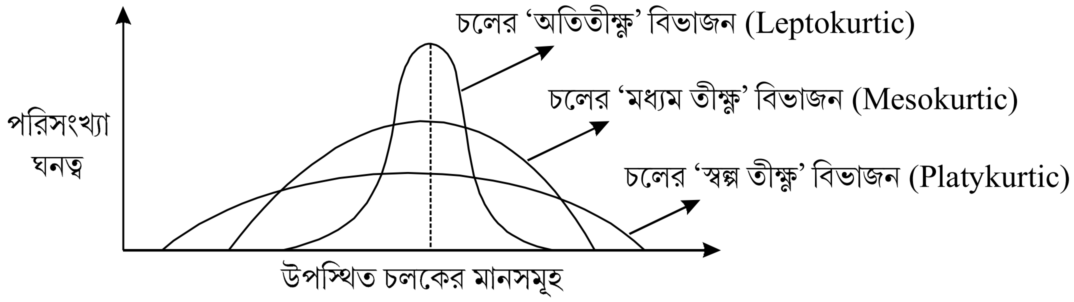
এস্থলে, প্রতিবৈষম্য গুণাংক (γ_1) (গামা এক) $= \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$, ($\sigma$ = প্রমাণ বিচ্যুতি)

বি.দ্র. (i) Sk_1 ও Sk_2 -এর মান (–3) থেকে (3) -এর মধ্যে বিরাজ করে। (ii) আপেক্ষিকভাবে প্রতিবৈষম্য গুণাংক পরিমাপ করা হয় বলে এই মাপক একক বর্জিত। (iii) $\gamma_1 < 0$ হলে বিভাজন হবে ঋণাত্মক ভাবে প্রতিবৈষম্য।

তীক্ষ্ণতা (Kurtosis) ঃ

যখন কোন বিভাজনের সংখ্যাগুরুমানের খুব নিকটবর্তী (উভয় দিকে) বিন্যস্ত চলরাশির মানগুলি কেন্দ্রীভূত হওয়ার মাত্রাকে বিভাজনের তীক্ষ্ণতা (Kurtosis) রূপে বিবেচিত হয়। চলের এই কেন্দ্রীভবন মাত্রা যত বেশি হবে ততই পরিসংখ্যা রেখার অগ্রভাগ ছুঁচালো (বা তীক্ষ্ণ) হবে। চলকের স্বাভাবিক পরিসংখ্যা রেখার (যা ঘন্টাকৃতি) থেকে তীক্ষ্ণতা বেশি বা কম হয়। প্রথম দিকটা খুবই ছুঁচালো এবং দ্বিতীয় ভাগটি চ্যাপ্টাকৃতি। মধ্যবর্তী স্থানে চলের স্বাভাবিক পরিসংখ্যা রেখা। পরিসংখ্যা রেখার এই আকৃতি, স্ফীত হওয়া ব্যাপারটা থেকে গ্রিক ভাষার অনুসারে ‘Kurtosis’ বা তীক্ষ্ণতার জন্ম হয়েছে। রাশিবিজ্ঞানী কাউডেন এবং ক্রক্সটনের মতে, চলের পরিসংখ্যা রেখার পরিবর্তনের (স্বাভাবিক বিভাজন (normal distribution সাপেক্ষে) মাত্রাকে বলা হবে তীক্ষ্ণতা (Kurtosis)। চলের পরিসংখ্যা রেখা যে সময় স্বাভাবিক বিভাজন রূপ নেয় তাকে ‘মধ্যক তীক্ষ্ণ’ বা (Mesokurtic) বিভাজন বলে। যদি কোন চলের পরিসংখ্যা যখন অগ্রভাগ স্বাভাবিক বিভাজন রূপটির চেয়ে অধিক মাত্রায় তীক্ষ্ণ হয় তবে তাকে ‘অতি তীক্ষ্ণ’ (lepto kurtic) বিভাজন বলে। অপরদিকে, চলের পরিসংখ্যা রেখার অগ্রভাগ স্বাভাবিক বিভাজন রূপ (অর্থাৎ উহার পরিসংখ্যার রেখা) এর চেয়ে নিম্নগামী হয় তবে তাকে ‘স্বল্প তীক্ষ্ণ’ (platykurtic) বিভাজন বলে।

এক কথায়, 'অতি তীক্ষ্ণ' বিভাজন এবং 'স্বল্প তীক্ষ্ণ' বিভাজনকে ধনাত্মক তীক্ষ্ণতা এবং ঋণাত্মক তীক্ষ্ণতার দিক হিসাবে তুলে ধরা যায়। ১৯০৫ সালে পরিসংখ্যাবিদ কার্ল পিয়ারসন চিত্রের সাহায্যে এই ব্যাপারটাকে উপস্থিত করেন।



তীক্ষ্ণতার মাপক প্রণালী ঃ

তীক্ষ্ণতাকে পরিমাপ কাজে সাহায্য করে তীক্ষ্ণতা গুণাংক (Co-efficient of Kurtosis)

সুতরাং, তীক্ষ্ণতা গুণাংক (β_2) $= \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$ [μ_4 হ'ল যৌগিক গড়কেন্দ্রিক চতুর্থ ভ্রামক) (পরিঘাত)]

[μ_2 হ'ল যৌগিক গড়কেন্দ্রিক দ্বিতীয় ভ্রামক) (পরিঘাত)]

$= \frac{\mu_4}{\sigma_4}$ [$\therefore\ \mu_2 = \sigma^2$ যেখানে σ হ'ল প্রমাণ বিচ্যুতি]

বি.দ্র. (1) স্বাভাবিক বিভাজনের ক্ষেত্রে, $\beta_2 = 3$.

যদি $\beta_2 > 3$ হয় তখন সুনির্দিষ্ট বিভাজনের পরিসংখ্যা রেখা স্বাভাবিক বিভাজন রেখার অপেক্ষা অগ্রভাগ আরও তীক্ষ্ণ (বা ছুঁচালো) হয়। এক্ষেত্রে অতি তীক্ষ্ণ বিভাজন (Leptokurtic) পাওয়া যায়। অন্যভাবে যদি $\beta_2 < 3$ হয় তখন চলের পরিসংখ্যা রেখার অগ্রভাগ স্বাভাবিক বিভাজন রেখা অপেক্ষা অনেক কম তীক্ষ্ণ হয় অর্থাৎ 'চ্যাপ্টা' আকারের হয়।

(2) অনেক ক্ষেত্রে, আমরা $\beta_2 - 3 - \gamma_2$ কে ['বিশেষ' তীক্ষ্ণতার] প্রতীক রূপে চিহ্নিত করা হয়। $\gamma_2 = 0$ হলে অর্থাৎ $\beta_2 = 3$ হলে বিভাজন থেকে প্রাপ্ত পরিসংখ্যা রেখা মধ্যম তীক্ষ্ণ (Mesokurtic), $\gamma_2 > 0$ অর্থাৎ $\beta_2 > 3$ হলে পরিসংখ্যা রেখা অতি তীক্ষ্ণ (Leptokurtic) এবং $\gamma_2 < 0$ হলে অর্থাৎ $\beta_2 < 3$ হলে পরিসংখ্যা রেখা 'স্বল্প তীক্ষ্ণ' (platykurtic) হিসাবে পরিচিত হবে।

6.7 বিবিধ উদাহরণমালা

উদা. (1) প্র. শ্রেণিবন্ধ পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে কেন্দ্রীয় ভ্রামকগুলি কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামকগুলির এবং পরিশেষে শূন্য (বা মূলবিন্দু) কেন্দ্রিক ভ্রামকসমূহের সঙ্গে সম্পর্কগুলি উল্লেখ করুন।

(উত্তর) : ধরি x চলকের বিভিন্ন মানসমূহ $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ এবং তাদের অনুরূপ পরিসংখ্যা $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n$

সুতরাং শূন্যকেন্দ্রিক r-তম ভ্রামক (পরিঘাত) বা $\gamma_r = \dfrac{\sum fx^r}{\text{N}} \ldots\ldots(1)$

[যেখানে $f_1 + f_2 + \ldots\ldots f_n = \text{N}$]

$\overline{x}$ [যৌগিক গড় বা মধ্যক] সাপেক্ষে r-তম ভ্রামক (পরিঘাত)

বা $\mu_r = \dfrac{\sum f(x-\overline{x})^r}{\text{N}} \ldots\ldots(2)$

A [নির্দিষ্ট বিন্দু] সাপেক্ষে r-তম ভ্রামক (পরিঘাত)

$$\mu'_r = \frac{\sum f(x-\text{A})^r}{\text{N}} \ldots\ldots(3)$$

এখন μ_r, μ'_r এবং γ_r এর মধ্যে সম্পর্কগুলি নির্ধারণ ক'রতে হবে।

(1) নং সম্পর্কে থেকে, $\gamma_0 = \frac{1}{\text{N}}\sum f(x^{\text{o}}) = 1$

(2) নং সম্পর্কে থেকে, $\mu_0 = \frac{1}{\text{N}}\sum f(x-\overline{x})^{\text{o}} = 1$

(3) নং সম্পর্ক থেকে, $\mu'_0 = \frac{1}{\text{N}}\sum f(x-\text{A})^{\text{o}} = 1$

এখন, $\mu_1 = \frac{1}{\text{N}}\sum f(x-\overline{x})^1$

(3) নং থেকে পাই

$$\mu'_1 = \frac{1}{\text{N}}\sum f(x-\text{A})$$

$$=\frac{1}{N}\left(\sum f(x)-A\sum f\right)$$

$$=\frac{1}{N}\sum fx-A\frac{\sum f}{N}$$

$$=\overline{x}-A$$

$$=\frac{1}{N}\left(\sum fx-\overline{x}\sum f\right)$$

$$=\frac{\sum fx}{N}-\overline{x}\left(\frac{\sum f}{N}\right)$$

$$=\overline{x}-\overline{x}\cdot 1=\overline{x}-\overline{x}=0$$

$$\gamma_1=\frac{\sum f(x)^1}{N}=\frac{\sum fx}{N}=\overline{x}$$

$$\therefore\ \mu_1=0,\ \mu_1'=\overline{x}-A,\ \gamma_1=\overline{x}.$$

$$\therefore\ \mu_2'=\frac{\sum f(x-A)^2}{N}$$

$$=\frac{1}{N}\sum f(x-\overline{x}+\overline{x}-A)^2$$

$$=\frac{1}{N}\sum f(x-\overline{x})^2+\frac{1}{N}\sum f(\overline{x}-A)^2$$

$$=\mu_2+(\mu_1')^2\quad[\because\ \overline{x}-A=\mu_1']$$

$$\therefore\ \mu_2=\mu_2'-(\mu_1')^2$$

$$\therefore\ \mu_3'=\frac{1}{N}\sum f(x-A)^3$$

$$=\frac{1}{N}\sum f\left\{(x-\overline{x})+(\overline{x}-A)\right\}^3$$

$$= \frac{1}{N}\sum f\left\{(x-\overline{x})^3 + (\overline{x}-A)^3 + 3(x-\overline{x})^2(\overline{x}-A) + 3(x-\overline{x})(\overline{x}-A)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{N}\sum f\left\{(x-\overline{x})^3 + (\mu_1')^3 + 3(x-\overline{x})^2(\mu_1') + 3(x-\overline{x})(\mu_1')^2\right\}$$

$$= \mu_3 + \left(\frac{1}{N}\sum f\right)(\mu_1')^3 + 3\mu_1' \cdot \frac{1}{N}\sum f(x-\overline{x})^2 + 3(\mu_1')^2 \cdot \frac{1}{N}\sum f(x-\overline{x})$$

$$= \mu_3 + (\mu_1')^3 + 3\mu_1' \cdot \mu_2 + 3(\mu_1')^2 \mu_1 \left[\because \sum f = N\right]$$

$$= \mu_3 + \mu_1'^3 + 3\mu_1'\mu_2 + 3(\mu_1')^2 \cdot 0 \; (\because {}_1 = 0)$$

$$= \mu_3 + 3\mu_2\mu_1' + (\mu_1')^3$$

$$\therefore \mu_3 = \mu_3' - 3\mu_2\mu_1' - (\mu_1')^3 = \mu_3' - 3\mu'\left(\mu_2' - (\mu_1')^2\right) - (\mu_1')^3$$

$$= \mu_3' - 3\mu_2'\mu_1' + 3(\mu_1')^3 - (\mu_1')^3$$

$$= \mu_3' - 3\mu_2'\mu_1' + 2(\mu_1')^3$$

পুনরায়,

$$\mu_2 = \frac{1}{N}\sum f(x-\overline{x})^2$$

$$= \frac{1}{N}\sum f\left(x^2 - 2x\overline{x} + (\overline{x})^2\right)$$

$$= \frac{1}{N}\sum fx^2 - 2\left(\frac{1}{N}\sum fx\right)\cdot\gamma_1 + \left(\frac{1}{N}\sum f\right)\gamma_1^2 \quad [\therefore \overline{x} = \gamma_1]$$

$$= \gamma_2 - 2\cdot\overline{x}\cdot\gamma_1 + 1\cdot\gamma_1^2 \qquad \left[\because \frac{1}{N}\sum f = \frac{1}{N}\cdot N = 1\right]$$

$$= \gamma_2 - 2\gamma_1^2 + \gamma_1^2$$

$$= \gamma_2 - \gamma_1^2 \Rightarrow \mu_2 = \gamma_2 - \gamma_1^2$$

অনুরূপভাবে, $\mu_3 = \frac{1}{N}\sum f\left(x-\bar{x}\right)^3$

$$= \frac{1}{N}\sum f\left(x^3 - 3x^2\bar{x} + 3\cdot x\cdot\left(\bar{x}\right)^2 - \left(\bar{x}\right)^3\right)$$

$$= \frac{1}{N}\sum fx^3 - 3\cdot\frac{\sum fx^2}{N}\cdot\left(\gamma_1\right) + 3\cdot\frac{\sum fx}{N}\cdot\gamma_1^2 - \left(\frac{1}{W}\cdot\sum f\right)\cdot\gamma_1^3 \;\left(\because \bar{x} = \gamma_1\right)$$

$$= \gamma_3 - 3\cdot\gamma_2\gamma_1 + 3\cdot\bar{x}\cdot\gamma_1^2 - 1\gamma_1^3$$

$$= \gamma_3 - 3\gamma_2\gamma_1 + 2\gamma_1^3$$

$$\Rightarrow \mu_3 = \gamma_3 - 3\gamma_2\gamma_1 + 2\gamma_1^3$$

পুনরায়, আমরা লিখতে পারি যে

$$\gamma_2 = \mu_2 + \gamma_1^2$$

$$= \frac{1}{N}\sum f\left(x-\bar{x}\right)^2 + \gamma_1^2$$

$= \sigma^2 + \gamma_1^2$ [যেখানে σ = চলের সমক পার্থক্য বা প্রমাণ বিচ্যুতি]

μ_r -এর সাধারণ রূপ : (General form of μ_r)

এস্থলে μ_r = r-তম কেন্দ্রীয় ভ্রামক (পরিঘাত) এবং μ'_r = একটি সুনির্দিষ্ট বিন্দু (A) সাপেক্ষে r-তম ভ্রামক (পরিঘাত)।

$\therefore \mu_r = \frac{1}{N}\sum f\left(x-\bar{x}\right)^r$ এবং $\mu'_r = \frac{1}{N}\sum f\left(x-A\right)^r$

এখন, $\mu_r = \frac{1}{N}\sum f\left(x-\bar{x}\right)^r$

বা, $\mu_r = \frac{1}{N}\sum f\left\{\left(x-A\right)-\left(\bar{x}-A\right)\right\}^r$

$$= \frac{1}{N}\sum f\left[\left(x-A\right)-\mu'_1\right]^r$$

$$[\ \therefore \mu_1' = \frac{1}{N}\sum f(x-A)$$

$$= \frac{1}{N}\sum fx - A\frac{1}{N}\cdot\sum f$$

$$= \bar{x} - A.1$$

$$\because \sum f = N$$

$$= \bar{x} - A\ \ ]$$

$$= \frac{1}{N}\sum f\Big[(x-A)^r - rc_1(x-A)^{r-1}(\mu_1') + rc_2(x-A)^{r-2}(\mu_1')^2$$

$$+ ... + (-1)^r(\mu_1')^r\,]$$

$$= \frac{1}{N}\sum f(x-A)^r - rc_1\cdot\frac{1}{N}\sum f(x-A)^{r-1}\cdot(\mu_1')$$

$$+ rc_2\cdot\frac{1}{N}\sum f(x-A)^{r-2}(\mu_1')^2 + ...(-1)^r(\mu_1')^r$$

লক্ষণীয় :

$$\frac{1}{N}\sum f(\mu_1')$$

$$= \mu_1'\left(\frac{\sum f}{N}\right)$$

$$= \mu_1'\cdot 1$$

$$= \mu_1'$$

$$\therefore \mu_r = \mu_r' - rc_1\mu_{r-1}'(\mu_1') + rc_2\mu_{r-2}'(\mu_1')^2 + ... + (-1)^r(\mu_1')^r$$

এস্থলে, r = 1, 2, 3.... বসিয়ে

μ_1, μ_2, μ_3 .... কে μ_1', μ_2', μ_3'...তে রূপান্তরিত করা যায়। এভাবে, μ_i, μ_i' ও γ_i (i = 1, 2, 3,...) -এর মধ্যে যথাযথ সম্পর্কগুলি স্থাপন করা সম্ভব হবে।

উদা. 2 1, 3, 5, 7 সংখ্যাগুলির প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় কেন্দ্রীয় ভ্রামকের (Central moments) মান নির্ণয় করুন। এর থেকে প্রতিবৈষম্য গুণাংক পরিমাপ করুন।

সমাধান ঃ

মনে করি, 1, 3, 5, 7 এর যৌগিক গড় $= \overline{x}$

$$\therefore \overline{x} = \frac{1+3+5+7}{4} = \frac{16}{4} = 4.$$

চলরাশি (x) এর প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় ভ্রামক (পরিঘাত) নির্ণয়ের জন্য নীচের তালিকাটি গঠন করা প্রয়োজন।

চলের মান (x)	$x-\overline{x}$	$(x-\overline{x})^2$	$(x-\overline{x})^3$
1	1 – 4 = – 3	$(-3)^2 = 9$	$(-3)^3 = -27$
3	3 – 4 = – 1	$(-1)^2 = 1$	$(-1)^3 = -1$
5	5 – 4 = 1	$(1)^2 = 1$	$(1)^3 = 1$
7	7 – 4 = 3	$(3)^2 = 9$	$(3)^3 = 27$
মোট	$\sum(x-\overline{x}) = 0$	$\sum(x-\overline{x})^2 = 20$	$\sum(x-\overline{x})^3 = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় প্রথম কেন্দ্রীয় ভ্রামক (μ_1) (পরিঘাত) $= \frac{1}{n}\sum(x-\overline{x})$

$$= \frac{1}{4} \times 0 = 0$$

দ্বিতীয় কেন্দ্রীয় ভ্রামক (μ_2) $= \frac{1}{n}\sum(x-\overline{x})^2$

$$= \frac{1}{4} \times 20 = 5$$

তৃতীয় কেন্দ্রীয় ভ্রামক (μ_3) $= \frac{1}{n}\sum(x-\overline{x})^3$

$$= \frac{1}{4} \times 0 = 0$$

$\therefore$ নির্ণেয় প্রতিবৈষম্য গুণাংক (γ_1) $= \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}}$

$$=\frac{0}{(5)^{3/2}}=0$$

উত্তর : 0, 5, 0 ; 0

উদা. 3 একটি বিভাজনের 1 -এর সাপেক্ষে প্রথম ও দ্বিতীয় ভ্রামকের মান 2 এবং 25; বিভাজনটির যৌগিক গড় $(\overline{x})$ এবং প্রমাণ বিচ্যুতি (σ) নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ শর্তানুসারে,

$\frac{1}{n}\sum(x-1)=2$ বা, $\frac{1}{n}\sum x-\frac{1}{n}\sum 1=2$

বা, $\frac{1}{n}\sum x-\left(\frac{n}{n}\right)=2\left[\because \frac{1}{n}\sum(1)=\frac{1}{n}\cdot(n)\right]$

বা, $\overline{x}-1=2$ বা, $\overline{x}=3$

$\therefore$ নির্ণেয় যৌগিক গড় $(\overline{x})=3$

এস্থলে, $\frac{1}{n}\sum(x-1)=2$ অর্থাৎ $\mu_1'=2$

$\frac{1}{n}\sum(x-1)^2=25$ এবং $\mu_2'=25$

ধরি, যৌগিক গড় সাপেক্ষে দ্বিতীয় ভ্রামক = μ_2

$\therefore \mu_2=\frac{1}{n}\sum(x-\overline{x})^2=\sigma^2$ [যেখানে (চলের) প্রমাণ বিচ্যুতি = σ]

আমরা জানি যে, $\mu_2=\mu_2'-(\mu_1')^2$

$= 25 - (2)^2$

$= 25 - 4$

$= 21$

$\therefore \sigma^2=21$ বা $\therefore \sigma^2=\sqrt{21}=4{\cdot}58$ (আসন্ন)

উঃ নির্ণেয় বিভাজনের যৌগিক গড় = 3

এবং বিভাজনের প্রমাণ বিচ্যুতি = 4·58

উদা. 4 (a) যদি কোন প্রতিসম বিভাজনে $Q_1 = 24$ এবং $Q_3 = 42$ হয় তবে মধ্যমা (median) নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরি, বিভাজনের নির্ণেয় মধ্যমা = Q_2

প্রশ্নমতে, বিভাজনটি প্রতিসম বলে

$$Q_2 - Q_1 = Q_3 - Q_2$$

বা, $2Q_2 = Q_3 + Q_1$

$= 42 + 24$ [$\therefore Q_3 = 42, Q_1 = 24$]

$= 66$

বা, $Q_2 = \frac{66}{2} = 33$

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যমা = 33 **(উত্তর)**

(b) যদি $Q_1 = 26$, $Q_3 = 76$ এবং প্রতিবৈষম্য গুণাংক = 0·2 হয় তবে মধ্যমা নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরি, নির্ণেয় মধ্যমা = Q_2

বাওলির 'প্রতিবৈষম্য গুণাংক' সূত্রানুসারে,

প্রতিবৈষম্য গুণাংক $(Sk_3) = \frac{Q_3 + Q_1 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1}$

বা, $0{\cdot}2 = \frac{76 + 26 - 2Q_2}{76 - 26}$ [$\therefore Q_3 = 76$, $Q_1 = 26$ এবং $Sk_3 = 0{\cdot}2$]

বা, $\frac{2}{10} = \frac{102 - 2Q_2}{50}$

বা, $102 - 2Q_2 = \frac{2}{10} \times 50$

বা, $102 - 2Q_2 = 10$

বা, $2Q_2 = 102 - 10$

বা, $2Q_2 = 92$

বা, $Q_2 = \frac{92}{2}$

বা, $Q_2 = 46$

∴ নির্ণেয় মধ্যমা = 46 **(উত্তর)**

উদা. 5 (a) 1, 3, 7, 9, 10 সংখ্যাগুলির জন্য যৌগিক গড় সাপেক্ষে প্রথম চারটি ভ্রামক এবং প্রথম চারটি 'A' -কেন্দ্রিক ভ্রামক নির্ণয় করুন (যেখানে, A (ধ্রুবক) = 4)

(b) উপরের প্রাপ্ত মান সাপেক্ষে দেখান যে

$$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_1'\mu_2' + 2\mu_1'^3.$$

সমাধান ঃ (a) গণনা কার্য ঃ (প্রথম অংশের জন্য)

চলের মান (x)	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$(x-\bar{x})^3$	$(x-\bar{x})^4$
1	$1-6=-5$	$(-5)^2 = 25$	$(-5)^3 = -125$	$(-5)^4 = 625$
3	$3-6=-3$	$(-3)^2 = 9$	$(-3)^3 = -27$	$(-3)^4 = 81$
7	$7-6=1$	$(1)^2 = 1$	$(1)^3 = 1$	$(1)^4 = 1$
9	$9-6=3$	$(3)^2 = 9$	$(3)^3 = 27$	$(3)^4 = 81$
10	$10-6=4$	$(4)^2 = 16$	$(4)^3 = 64$	$(4)^4 = 256$
মোট	$\sum(x-\bar{x})=0$	$\sum(x-\bar{x})^2=60$	$\sum(x-\bar{x})^3=-60$	$\sum(x-\bar{x})^4=1044$

এক্ষেত্রে যৌগিক গড় $(\bar{x}) = \frac{1+3+7+9+10}{5} = \frac{30}{5} = 6$

∴ প্রথম কেন্দ্রীয় ভ্রামক $(\mu_1) = \frac{\sum(x-\bar{x})}{n} = \frac{0}{5} = 0$ [এস্থলে, n = 5]

দ্বিতীয় কেন্দ্রীয় ভ্রামক $(\mu_2) = \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n} = \frac{60}{5} = 12$

তৃতীয় কেন্দ্রীয় ভ্রামক $(\mu_3) = \frac{\sum(x-\bar{x})^3}{n} = \frac{-60}{5} = -12$

চতুর্থ কেন্দ্রীয় ভ্রামক $(\mu_4)=\frac{\sum(x-\bar{x})^4}{n}=\frac{1044}{5}=208{\cdot}8$

উত্তর : 0, 12, –12, 208·8

(দ্বিতীয় অংশের জন্য) **গণনা কার্য :** A = 4 -এর সাপেক্ষে প্রথম চারটি ভ্রামক নির্ণয় ক'রতে হবে :

চলের মান (*x*)	***x* – A, A = 4**	**$(x-4)^2$**	**$(x-4)^3$**
1	1 – 4 = –3	$(-3)^2 = 9$	$(-3)^3 = -27$
3	3 – 4 = –1	$(-1)^2 = 1$	$(-1)^3 = 1$
7	7 – 4 = 3	$(3)^2 = 9$	$(3)^3 = 27$
9	9 – 4 = 5	$(5)^2 = 25$	$(5)^3 = 125$
10	10 – 4 = 6	$(6)^2 = 36$	$(6)^3 = 216$
মোট	$\sum(x-4)=10$	$\sum(x-4)^2=80$	$\sum(x-4)^3=340$

$\therefore$ নির্ণেয় $\mu_1'=\frac{\sum(x-4)}{n}=\frac{10}{5}=2$ (4-কেন্দ্রিক প্রথম ভ্রামক)

$\mu_2'=\frac{\sum(x-4)^2}{n}=\frac{80}{5}=16$ (4-কেন্দ্রিক দ্বিতীয় ভ্রামক)

$\mu_3'=\frac{\sum(x-4)^3}{n}=\frac{340}{5}=68$ (4-কেন্দ্রিক তৃতীয় ভ্রামক)

(b) এক্ষেত্রে, $\mu_3=-12$

এবং $\mu_3=\mu_3'-3\mu_1'\mu_2'+2\mu_1'^3$

$=68-3\times2\times16+2\times(2)^3$

$=68-96+16$

$=84-96=-12$

$\mu_3=\mu_3'-3\mu_1'\mu_2'+2\mu_1'^3$, এটাই নির্ণেয় ফল।

উদা. 6. প্র. যৌগিক গড়, (বা মধ্যক) সাপেক্ষে প্রথম চারটি ভ্রামকের পরিপ্রেক্ষিতে শেফার্ডের শুদ্ধিকরণ সূত্রটি উল্লেখ কর। একটি উপযুক্ত উদাহরণযোগে একে ব্যাখ্যা করুন।

সমাধান ঃ চলের যে কোন একটি পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে, আমরা ধরি যে পরিসংখ্যা, চলের শ্রেণী সীমার মধ্যবিন্দুতে ন্যস্ত আছে। ভ্রামক নির্ণয় কালে এহেন প্রাক্ ধারণা থেকে কিছুটা ভ্রান্তি (বা ত্রুটি) এসে যায়। পরিসংখ্যাবিদ W.F. Sheppard (ডব্লিউ. এফ্. শেফার্ড) ভ্রামকের প্রাপ্ত মানকে ত্রুটি মুক্ত ক'রতে একটি সূত্র রচনা করেন। এই ত্রুটিমুক্ত সূত্রটি হ'ল নিম্নরূপ ঃ

(যৌগিক গড় সাপেক্ষে প্রথম ভ্রামক) $\mu_1 = 0$

অনুরূপে, σ^2 বা $\mu_2 = \mu'_2 - \mu'^2_1 - \frac{1}{12}c^2$

[σ = প্রমাণ বিচ্যুতি, C = হ'ল শ্রেণির অবকাশ (Class interval)]

μ_3 [যৌগিক চলের গড় (বা মধ্যক) সাপেক্ষে প্রাপ্ত তৃতীয় ভ্রামকের মান 'অপরিবর্তিত' থাকবে।]

$$= \mu'_3 - 3\mu'_1\mu'_2 + 2(\mu'_1)^2 \text{ এবং } \mu_4 = \mu'_4 - 4\mu'_1\mu'_2 + 6(\mu'_1)^2\mu'_2 - 3(\mu'_2)4$$

$$-\frac{1}{2}\mu_2 c^2 + \frac{7}{240}c^4$$

এক্ষেত্রে, $\mu'_i(i = 1, 2, 3, 4)$ হ'ল

'A' (নির্দিষ্ট ধ্রুবক) কেন্দ্রিক প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ ভ্রামক।

উদাহরণযোগে ব্যাখ্যা (শেফার্ড সূত্রের) ঃ

প্রদত্ত চলের পরিসংখ্যা বিভাজন ছক থেকে আমরা শেফার্ডের ত্রুটিমুক্ত সূত্র কে ব্যাখ্যা ক'রব। অর্থাৎ μ_2 ও μ_4 এর ত্রুটিমুক্ত মান নির্ণয় ক'রব।

গণনা কার্য ঃ নীচেয় প্রদত্ত চলের পরিসংখ্যা বিভাজন ছক থেকে নির্দিষ্ট ধ্রুবরাশি (A)= 55 (ধরে), প্রথম চারটি ভ্রামক নির্ণয় করব।

চলের মান (x)	পরিসংখ্যা (f)	d = x – A	fd	fd^2	fd^3	fd^4
51	4	–4	4 × (–4) = –16	64	–256	24
52	5	–3	5 × (–3) = –15	45	–135	405
53	8	–2	8 × (–2) = –16	32	–64	128
54	10	–1	10 × (–1) = –10	10	–10	–10
55	9	0	9 × 0 = 0	0	0	0
56	6	1	6 × 1 = 6	6	6	6
57	3	2	3 × 2 = 6	12	24	48
মোট	$\sum f = 45$	$\sum d = -7$	$\sum fd = -45$	$\sum fd^2 = 169$	$\sum fd^3 = -435$	$\sum fd^4 = 1621$

এখন, $\mu'_1 = \frac{\sum fd}{\sum f} = \frac{-45}{45} = -1$

(A -কেন্দ্রিক প্রথম ভ্রামক)

অনুরূপে, $\mu'_2 = \frac{\sum fd^2}{\sum f} = \frac{169}{45} = 3{\cdot}76$

$$\mu'_3 = \frac{\sum fd^3}{\sum f} = \frac{-435}{45} = -9{\cdot}6$$

এবং $\mu'_4 = \frac{\sum fd^4}{\sum f} = \frac{1621}{45} = 36$

এস্থলে, যৌগিক গড় $(\overline{x}) = \mathrm{A} + \frac{\sum fd}{\sum f}$

$$= 55 + \left(\frac{-45}{45}\right)$$

$$= 55 - 1 = 54$$

A-র সাপেক্ষে চলের প্রথম চারটি ভ্রামক μ_1, μ_2, μ_3 এবং μ_4 নির্ধারণ ক'রব μ'_1, μ'_2, μ'_3 এবং μ'_4 -এর সাহায্য নিয়ে।

স্পষ্টত, $\mu_1 = 0$.

$$\mu_2 = \mu'_2 - \mu'^2_1 = 3{\cdot}76 - (-1)^2 = 3{\cdot}76 - 1 = 2{\cdot}76$$

$$\mu_3 = \mu'_2 - 3\mu'_1\mu'_2 + 2\mu'^3_1$$

$$= -9{\cdot}6 - 3(-1)(3{\cdot}76) + 2(-1)^3 = -9{\cdot}6 + 11{\cdot}28 - 2$$

$$= 11{\cdot}28 - 11{\cdot}6 = -0{\cdot}32$$

$$\mu_4 = \mu'^4_1 - 4\mu'_1\mu'_2 + 6\mu'^2_1\mu'_2 - 3\mu'^4_1$$

$$=36-4(-1)(-9{\cdot}6)+6(-1)^2(3{\cdot}76)-3(-1)^4$$

$$=36-38{\cdot}4+22{\cdot}56-3=58{\cdot}56-41{\cdot}40=17{\cdot}16$$

এখন শেফার্ডের ভ্রান্তিমুক্ত (বা ত্রুটিমুক্ত) সূত্র অবলম্বনে শুদ্ধিকরণের মাধ্যমে μ_2 এবং μ_4 -এর মান নির্ণয় ক'রব, কারণ $\mu_1 = 0$ এবং μ_3 -এর মান অপরিবর্তিত থাকবে।

$\therefore$ μ_2 এর ত্রুটিমুক্ত মান

$=\mu_2'-\mu_1^2-\frac{1}{12}c^2$ [শেফার্ড সূত্রানুসারে]

$=3{\cdot}76-(-1)^2-\frac{1}{12}(1)^2$ [$\because$ c = 1 (শ্রেণি অবকাশ) (class interval)]

$$=3{\cdot}76-1-\frac{1}{12}$$

$$=3{\cdot}76-1-0{\cdot}08$$

$$=3{\cdot}760-1{\cdot}08$$

$$=2{\cdot}68$$

μ_4 -এর ত্রুটিমুক্ত মান

$$=\mu_4'-4\mu_1'\mu_2'=6\mu_1'^2\mu_2'-3\mu_1'^4-\frac{1}{2}\mu_2c^2+\frac{7}{240}c^4$$

$$=36-4(-1)(-9{\cdot}6)+6(-1)^2(3{\cdot}76)-3(-1)^4-\frac{1}{2}(2{\cdot}76)(1)^2+\frac{7}{240}(1)^4\ [\because c=1]$$

$$=36-38{\cdot}4+22{\cdot}56-3-1{\cdot}38+\frac{7}{240}$$

$$=36-38{\cdot}4+22{\cdot}56-3-1{\cdot}38+0{\cdot}03$$

$$=58{\cdot}59-42{\cdot}78=15{\cdot}81$$

$\therefore$ (শেফার্ড সূত্র অনুসারে) নির্ণেয় μ_2 এবং μ_4 -এর ত্রুটি মুক্ত মান যথাক্রমে $2{\cdot}68$ এবং $15{\cdot}81$ **(উত্তর)**

উদা. 7. প্রদত্ত চলের পরিসংখ্যা বিভাজন ছক থেকে 'কেলির পদ্ধতি' অনুসরণ করে প্রতিবৈষম্য গুণাংক নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

চলের শ্রেণি সীমানা	**পরিসংখ্যা (f)**	**ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (c.f)**
0 – 10	4	4
10 – 20	6	6 + 4 = 10
20 – 30	20	20 + 10 = 30
30 – 40	10	30 + 10 = 40
40 – 50	7	40 + 7 = 47
50 – 60	3	47 + 3 = 50

এস্থলে, $\mathrm{N}=\sum f=50$

$\frac{\mathrm{N}}{2}=\frac{50}{2}=25$ -তম স্থানে মধ্যমা (M) -কে পাওয়া যাবে যা (20 – 30) শ্রেণির অন্তর্গত।

P_{10} (দশম শততমক) যা (10 – 20) শ্রেণি সীমানায় অবস্থিত যার মান চলের $\left(\frac{10\times 50}{100}\right)$ বা পঞ্চম স্থানের মানের সমান।

$$\therefore \mathrm{P}_{10}=10+\left\{\frac{\left(\frac{10\times 50}{100}\right)-4}{6}\right\}\times 10$$

$$=10+\left(\frac{5-4}{6}\right)\times 10$$

$$=10+\frac{10}{6}=10+\frac{5}{3}=10+1\cdot 67=11\cdot 67 \text{ (আসন্ন)}$$

অনুরূপে, P_{90} (নব্বই শততমক) যা (40 – 50) শ্রেণি সীমানায় অবস্থিত। যার মান চলের $\left(\frac{90\times 50}{100}\right)$ বা 45-তম স্থানে অবস্থিত মানের সমান।

$$\therefore \mathrm{P}_{90}=40+\left\{\frac{\frac{90\times 50}{100}-40}{7}\right\}\times 10$$

$$= 40 + \left(\frac{45-40}{7}\right) \times 10$$

$$= 40 + \frac{50}{7} = 40 + 7{\cdot}14$$

$$= 47{\cdot}14$$

μ (মধ্যমা) $= 20 + \left(\frac{\frac{50}{2}-10}{20}\right) \times 10$

$$= 20 + \frac{25-10}{20} \times 10$$

$$= 20 + \frac{15-10}{20}$$

$$= 20 + \frac{15}{2} = 20 + 7{\cdot}50$$

$$= 27{\cdot}50$$

$\therefore$ 'কেলি'র সূত্রানুসারে নির্ণেয় প্রতিবৈষম্য গুণাংক (Sk_4)

$$= \frac{P_{10} + P_{90} - 2 \times M}{P_{90} - P_{10}}$$

$$= \frac{11{\cdot}67 + 47{\cdot}14 - 2 \times 27{\cdot}50}{47{\cdot}14 - 11{\cdot}67}$$

$$= \frac{58{\cdot}81 - 55{\cdot}00}{35{\cdot}47}$$

$$= \frac{3{\cdot}81}{35{\cdot}47} = 0{\cdot}1073$$

$= 0{\cdot}107$ (আসন্ন)

উ. 0·107

উদা. 8. নিম্নোক্ত চলের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা অনুসারে 'কার্ল পিয়ারসন' পদ্ধতিতে প্রতিবৈষম্য গুণাংক নির্ণয় করুন।

(শ্রেণি অবকাশ/বিভাগ)	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
পরিসংখ্যা (f)	6	12	22	48	56	32	18	6

সমাধান ঃ

চলের সীমানা (সীমা)	চলের শ্রেণি সীমানা মধ্যমান (x)	পরিসংখ্যা (f)	$u=\frac{x-A}{h}$ **A = 35,** **h = 10**	**fu**	**fu²**
0 – 10	5	6	$\frac{5-35}{10}=-3$	$6\times(-3)=-18$	$6\times(-3)^2=54$
10 – 20	15	12	$\frac{15-35}{10}=-2$	$12\times(-2)=-24$	$12\times(-2)^2=48$
20 – 30	25	22	$\frac{25-35}{10}=-1$	$22\times(-1)=-22$	$22\times(-1)^2=22$
30 – 40	35	48	$\frac{35-35}{10}=0$	$48\times 0=0$	$48\times(0)^2=0$
40 – 50	45	56	$\frac{45-35}{10}=1$	$56\times 1=56$	$56\times(1)^2=56$
50 – 60	55	32	$\frac{55-35}{10}=2$	$32\times 2=64$	$32\times(2)^2=128$
60 – 70	65	18	$\frac{65-35}{10}=3$	$18\times 3=54$	$18\times(3)^2=162$
70 – 80	75	6	$\frac{75-35}{10}=4$	$6\times 4=24$	$6\times(4)^2=96$
মোট		$N=\sum f=200$		$\sum fu=134$	$\sum fu^2=566$

'কার্ল পিয়ারসন' প্রতিবৈষম্য গুণাংক $(Sk_1)=\dfrac{\text{যৌগিক গড়—সংখ্যাগুরু মান}}{\text{প্রমাণ বিচ্যুতি}}$

এখন, যৌগিক গড় $(\bar{x})=A+\frac{\sum fu}{N}\times h.....(1)$

$$= 35 + \frac{134}{200} \times 100$$

$$= 35 + \left(\frac{134 \times 10}{200}\right)$$

$$= 35 + \frac{670}{100}$$

$$= 35 + 6{\cdot}7 = 41{\cdot}7$$

এবং সংখ্যাগুরু মান (M_0) $= 40 + \frac{(56-48)}{(56-48)+(56-32)} \times 10$ (সূত্র থেকে)

$$= 40 + \frac{8}{8+24} \times 10$$

$$= 40 + \frac{8}{32} \times 10$$

$$= 40 + \frac{1}{4} \times 10 = 40 + \frac{5}{2} = 40 + 2{\cdot}5$$

$$= 42{\cdot}5$$

[যেহেতু, M_0 পর্যবেক্ষণে আসে (40 – 50) শ্রেণি বিভাগের অন্তর্গত]

$\therefore$ প্রমাণ বিচ্যুতি $(\sigma) = \sqrt{\frac{\sum fu^2}{N} - \left(\frac{\sum fu}{N}\right)^2} \times h$

$$= \sqrt{\frac{566}{200} - \left(\frac{134}{200}\right)^2} \times 10$$

$$= \sqrt{\frac{566}{200} - \frac{(134)^2}{40000}} \times 10$$

$$= \sqrt{\frac{566 \times 200 - (134)^2}{(200)^2}} \times 10$$

$$=\sqrt{\frac{113200-17956}{(200)^2}}\times 10$$

$$=\frac{308{\cdot}02\times 5}{100}$$

$$=\frac{1540{\cdot}10}{100}=15{\cdot}4$$ (এক দশমিক স্থান পর্যন্ত)

$\therefore$ নির্ণেয় প্রতিবৈষম্য গুণাংক (SK$_1$) $=\frac{41{\cdot}7-42{\cdot}5}{15{\cdot}4}$ [(1) নং থেকে]

$$=-\frac{0{\cdot}8}{15{\cdot}4}$$

$$=-\left(\frac{8}{154}\right)=-\left(\frac{4}{77}\right)$$

$=-0{\cdot}051$ (তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত)

উ : – 0·051

উদা. 9 একটি নির্দিষ্ট বিভাজনে প্রথম চারটি ভ্রামক [নির্দিষ্ট ধ্রুবক ‘4’ সাপেক্ষে কেন্দ্রীয় ভ্রামক] μ_1', μ_2', μ_3' এবং μ_4' হ’ল যথাক্রমে –1·5, 17, –30 এবং 108 ; β_2 নির্ণয় কর এবং β_2 -এর প্রেক্ষিতে বিভাজনের তীক্ষ্ণতা বিচার করুন।

সমাধান ঃ

ধরি, চলের যৌগিক গড় $=\bar{x}$ এবং যৌগিক গড় সাপেক্ষে প্রথম চারটি ভ্রামক হ’ল μ_1, μ_2, μ_3 এবং μ_4। μ_i এবং μ_i' সূত্রানুসারে আমরা লিখতে পারি যে (i = 1, 2, 3, 4)

$$\mu_1=\mu_1'-\mu_1'=0$$

$$\mu_2=\mu_2'-(\mu_1')^2$$

$$\mu_3=\mu_3'-3\mu_2'\mu_1'+2(\mu_1')^3$$

$$\mu_4=\mu_4'-4\mu_3'\mu_1'+6\mu_2'(\mu_1')^2-3(\mu_1')^4$$

প্রশ্নানুসারে,

$$\mu_1 = -1{\cdot}5 - (-1{\cdot}5) = -1{\cdot}5 + 1{\cdot}5 = 0$$

$$\mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2 = 17 - (-1{\cdot}5)^2 = 17 - 2{\cdot}25$$

$$= 14{\cdot}75$$

$$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_2'\mu_1' + 2(\mu_1')^3$$

$$= -30 - 3(17)(-1{\cdot}5) + 2(-1{\cdot}5)^3$$

$$= -30 + 76{\cdot}5 - 6{\cdot}75$$

$$= 76{\cdot}5 - 36{\cdot}75$$

$$= 39{\cdot}75$$

$$\mu_4 = \mu_4' = 4\mu_3'\mu_1' + 6\mu_2'(\mu_1')^2 - 3(\mu_1')^4$$

$$= 108 - 4(-30)(-1{\cdot}5) + 6(17)(-1{\cdot}5)^2 - 3(-1{\cdot}5)^4$$

$$= 337{\cdot}5 - 195{\cdot}1875$$

$$= 142{\cdot}3125$$

$$= 142{\cdot}313 \text{ (আসন্ন)}$$

কার্ল পিয়ারসনের তীক্ষ্ণতা (Kurtosis) গুণাংক সূত্র অনুসারে,

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{142{\cdot}313}{(14{\cdot}75)^2}$$

$$= \frac{142 \cdot 313}{217 \cdot 56} = 0 \cdot 65$$

স্পষ্টত, $0{\cdot}65 < 3$ অর্থাৎ $\beta_2 < 3$.

সুতরাং চলের বিভাজনটি আকৃতিগত ভাবে স্বল্প তীক্ষ্ণ (Platykurtic) পর্যায়ে পড়ে।

উদা. 10. (a) কোন বিভাজনের ক্ষেত্রে, প্রথম চারটি কেন্দ্রীয় ভ্রামক যথাক্রমে 0, 2·5, 0·7 এবং 18·75 হলে বিভাজনের প্রতিবৈষম্য গুণাংক (β_1) ও (γ_1) এবং তীক্ষ্ণতা গুণাংক নির্ণয় করে তার প্রকৃতি নির্ধারণ করুন।

সমাধান ঃ শর্তানুসারে,

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = 2{\cdot}5$$

$$\mu_3 = 0{\cdot}7$$

এবং $$\mu_4 = 18{\cdot}75$$

$\therefore$ প্রতিবৈষম্য গুণাংক (β_1)

$$= \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{(0{\cdot}7)^2}{(2{\cdot}5)^3} = \frac{0{\cdot}49}{15{\cdot}625}$$

$$= 0{\cdot}03$$

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{{\mu_2}^{3/2}}$$

$$= \frac{0{\cdot}7}{(2{\cdot}5)^{3/2}} = \frac{0{\cdot}7}{(15{\cdot}625)^{1/2}}$$

$$= \frac{0\cdot7}{3\cdot95} = 0.177$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{18{\cdot}75}{(2{\cdot}5)^2} = \frac{1875}{625} = 3.$$

β_2 -এর মান 3 বলে দেয় বিভাজনটি মধ্যম তীক্ষ্ণ বা (Mesokurtic)

(b) কোন বিভাজনের দ্বিতীয় ও তৃতীয় কেন্দ্রীয় ভ্রামক 4 এবং 12 হলে বিভাজনটির প্রতিবৈষম্য গুণাংক (γ_1) নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ শর্তানুসারে, বিভাজনের

দ্বিতীয় ভ্রামক (কেন্দ্রীয়) = $\mu_2 = 4$

এবং তৃতীয় কেন্দ্রীয় ভ্রামক = $\mu_3 = 12$

$\therefore$ নির্ণেয় প্রতিবৈষম্য গুণাংক (γ_1)

$$= \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}}$$

$$= \frac{12}{(4)^{3/2}} = \frac{12}{\left(2^2\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1{\cdot}5$$

উ. 1·5

উদা. 11 কোন একটি বিভাজন -এর প্রেক্ষিতে নির্দিষ্ট ধ্রুবক 2 সাপেক্ষে অকেন্দ্রীয় (non-central) প্রথম ভ্রামক তিনটি হ'ল 1, 16 এবং – 40 দেখাও যে যৌগিক গড় = 3, ভেদমান (Variance) = 15 এবং $\mu_3 = -86$. প্রমাণ করুন, প্রথম তিনটি শূন্যকেন্দ্রিক $(\bar{x} = 0)$ ভ্রামক যথাক্রমে 3, 24 এবং 76.

সমাধান ঃ এস্থলে, $\mu_1' = 1, \mu_2' = 16$ এবং $\mu_3' = -40$ [যখন নির্দিষ্ট ধ্রুবক (A) = 2]

(i) $\therefore$ নির্ণেয় যৌগিক গড় $= A + \mu_1' = 2 + 1 = 3$

(ii) ভেদমান = যৌগিক গড় প্রেক্ষিতে দ্বিতীয় ভ্রামক = μ_2

যেহেতু, $\mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2 = 16 - (1)^2 = 16 - 1 = 15$

(iii) তৃতীয় ভ্রামক (যৌগিক গড়ের প্রেক্ষিতে)

$= \mu_3$

যেহেতু, $\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_2'\mu_1' + 2\mu_1'^3$

সুতরাং $\mu_3 = -40 - 3 \times (1) \times (16) + 2 \times (1)^3$

$$= -40 - 48 + 2$$

$$= -88 + 2 = -86$$

(iv) এখন শূন্যকেন্দ্রিক প্রথম তিনটি ভ্রামককে নির্ণয় ক'রতে হবে অর্থাৎ γ_1, γ_2 এবং γ_3 -কে নির্ণয় করতে হবে।

যেহেতু $\gamma_1 = A + \mu_1', \gamma_2 = \mu_2 + \gamma_1^2$ এবং $\gamma_3 = \mu_3 + 3\mu_2\gamma_1 + (\gamma_1)^3$

সুতরাং, $\gamma_1 = 2+1 = 3$

$$\gamma_2 = 15+(3)^2 = 15+9 = 24$$

এবং $\gamma_3 = -86+3\times(15)\times(3)+(3)^3$

$$= -86+135+27$$

$$= 162-86 = 76$$

$\therefore \gamma_1 = 3, \gamma_2 = 24$ এবং $\gamma_3 = 76$

উদা. 12 কোনো একটি বিভাজনে যৌগিক গড় সাপেক্ষে দ্বিতীয়, তৃতীয় এবং চতুর্থ ভ্রামক অর্থাৎ μ_2, μ_3 এবং μ_4 হ'ল যথাক্রমে 81, –144 এবং 14817। ভ্রামক সাপেক্ষে প্রতিবৈষম্য গুণাংক এবং তীক্ষ্ণতা গুণাংক নির্ণয় করুন এবং আকৃতি-প্রকৃতি উল্লেখ করুন।

সমাধান ঃ এক্ষেত্রে,

ভ্রামক প্রেক্ষিতে প্রতিবৈষম্য গুণাংক (β_1)

$$= \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{(-144)^2}{(81)^3} = \frac{20736}{531441}$$

$$= 0{\cdot}04 \text{ (আসন্ন)}$$

$\beta_1 = 0{\cdot}04$ (ধনাত্মক), সুতরাং পরিসংখ্যা বিভাজন রেখায় প্রতিবৈষম্যতা বিদ্যমান। এক্ষেত্রে, μ_3 ঋণাত্মক মান গ্রহণ করায় প্রতিবৈষম্য প্রকৃতিগত ভাবে ঋণাত্মকধর্মী।

β_2 -এর মানের মাধ্যমে তীক্ষ্ণতার স্বরূপ নির্ধারিত হবে।

এস্থলে, $\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{14817}{6561} = 2{\cdot}26 < 3$

যেহেতু β_2 -এর মান 3 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, সুতরাং পরিসংখ্যা রেখার মধ্যে তীক্ষ্ণতার স্বরূপ বিদ্যমান। প্রকৃতিগতভাবে ইহা ‘স্বল্প তীক্ষ্ণ’ শ্রেণির অন্তর্গত।

পুনরায়, $\gamma_2 = \beta_2 - 3$

$$= 2{\cdot}2 - 3 = -0{\cdot}8$$

এটাও স্পষ্ট হ'ল, γ_2 -এর মান ঋণাত্মক। সুতরাং পরিসংখ্যা রেখা ‘স্বল্পতীক্ষ্ণ’ ধর্মী।

6.8 সহপরিবর্তন এবং প্রতিগমন বা নির্ভরণ

প্রকৃতি বিজ্ঞান ও সমাজ বিজ্ঞানের অনেক ক্ষেত্রেই দুটি বা তার বেশি চলকের মধ্যে কীরূপ সম্পর্ক (relation) বর্তমান তা জানার প্রয়োজন হয়। অর্থবিদ্যায় ও ব্যবসা ক্ষেত্রে এর প্রভাব সহজেই লক্ষ করা যায়। যেমন দ্রব্য মূল্যের সঙ্গে চাহিদার সম্পর্ক, বিজ্ঞাপনের সঙ্গে দ্রব্যের ক্রয় (বা বিক্রয়) সম্পর্ক, বৃষ্টিপাতের সঙ্গে কৃষিজাত দ্রব্যের উৎপাদনের সম্পর্ক ইত্যাদি। যে বিশ্লেষণের মাধ্যমে এরূপ সম্পর্ক সহজেই অনুধাবন করা যায় তাকেই 'সহ পরিবর্তন' বা 'সহগতি' হিসাবে ধরা হয়। দুটি চলকের মধ্যে উপস্থিত সম্পর্ক থেকে যখন একটি চলকের মানের প্রেক্ষিতে অপর চলকের মান স্থির করা হয় তাকেই প্রতিগমন বা 'নির্ভরণ' বলা হয়। লেখচিত্র থেকে শুরু করে কার্ল পিয়ারসনের প্রণালী, স্পিয়ারম্যানের প্রণালী, কেন্ড্যালের প্রণালী, সমবিন্দু বিচ্যুতি (Concurrent deviation), লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতি উল্লেখযোগ্য। এ প্রসঙ্গে বলা দরকার যে চলকের মধ্যে সম্পর্ক কীরূপ তা নির্ধারণের জন্য একটি ধ্রুবরাশির (Constant) প্রয়োজন হয় তাকে 'সহগাঙ্ক' রূপে চিহ্নিত করা হয়। সহপরিবর্তন (সহগতি) এবং প্রতিগমন (নির্ভরণ) উভয় ক্ষেত্রেই এই সহগাঙ্কের গুরুত্ব অপরিসীম। এ বিষয়ে আমরা এখন সবিস্তারে আলোচনা ক'রব।

সহপরিবর্তন (বা সহগতি) -কে বীজগাণিতিক উপায়ে চলরাশি সাহায্যে নিম্নোক্ত ভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়।

ধরি, একটি নির্দিষ্ট সম্পর্কের x ও y দুটি চলরাশি এমন যে x চলকের বৃদ্ধির (বা হ্রাসের) ফলে অপর চলক y -এর মানের বৃদ্ধি (বা হ্রাস) ঘটে, তাকে রাশিবিজ্ঞানের ভাষায় 'সহপরিবর্তন' (বা 'সহগতি') বলা হয়। যেমন, কৃষিজাত দ্রব্যের মূল্য বৃদ্ধির সঙ্গে তার জোগানের বৃদ্ধি সমমুখী বা 'ধনাত্মক' সহপরিবর্তনের উদাহরণ। বিপরীতভাবে, একটি চলরাশির মানের বৃদ্ধি ঘটলে অপর চলরাশির মানের হ্রাস যে সম্পর্কে ঘটে তাকে 'ঋণাত্মক' বা 'বিপরীতমুখী' সহপরিবর্তন বলা চলে। যেমন, কোন বাজারজাত দ্রব্যের মূল্য বৃদ্ধি পেলে তাৎক্ষণিক ভাবে তার চাহিদা হ্রাস পায়। এটি একটি ঋণাত্মক সহপরিবর্তনের উদাহরণ। যে সহপরিবর্তনের ক্ষেত্রে প্রথম চলের মানের পরিবর্তনের সঙ্গে দ্বিতীয় চলের মান পরিবর্তনের কোনরূপ নির্ভরশীলতার সম্পর্ক বজায় থাকে না, তাকে 'সম্পর্কবিহীন সহপরিবর্তন' হিসাবে গণ্য করা হয়।

সহপরিবর্তনের এ-ধারাটি নিয়ন্ত্রিত হয় যে সংখ্যার সাহায্যে তা হ'ল 'সহপরিবর্তন গুণাংক' (Coefficient of Correlation). একে 'r' ('বা r_{xy}') চিহ্ন দিয়ে প্রকাশ করা হয়। ঋণাত্মক, ধনাত্মক ও সম্পর্কবিহীন সহপরিবর্তনের জন্য r সর্বদা -1 থেকে 1 এর মধ্যে সীমাবদ্ধ হয়। প্রথম ক্ষেত্রে $-1 \leq r < 0$, দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $0 < r \leq 1$, তৃতীয় ক্ষেত্রে $r = 0$. চলরাশি দুটি ধনাত্মক ভাবে গভীরভাবে সম্পর্কিত হয় যতই r -এর মান 1 এর খুবই নিকটবর্তী হয়। বিপরীতভাবে, চলরাশি দুটি ঋনাত্মক ভাবে যতই ঘনিষ্ঠ হয় ততই r -এর মান -1 এর নিকটবর্তী হয়। $r = 0$ হলে চলরাশি দুটির মধ্যে নিহিত সম্পর্ক লোপ পায়। এ প্রকার সম্পর্কগুলিকে আমরা 'বিক্ষিপ্ত চিত্র' (বা Scatter diagram) -এর সাহায্যে সুন্দরভাবে তুলে ধ'রতে পারি।

বিক্ষিপ্ত চিত্র (বা বিন্দু চিত্র) [Scalter diagram or dot diagram]

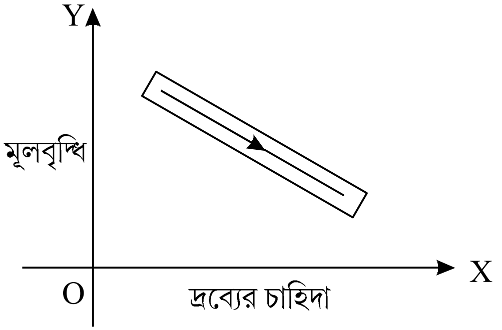
দুটি চলরাশি x ও y এর মধ্যে অবস্থিত সম্পর্ককে যখন লেখচিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা হয় তাকেই ‘বিন্দু চিত্র’ বলা হয়। এহেন বিন্দু চিত্রটি সরল (রৈখিক) বা বক্র এমনকি বিক্ষিপ্ত আকার লাভ করে বলে, একে অনিয়ন্ত্রিত বা ‘বিক্ষিপ্ত চিত্র’ হিসাবে উল্লেখ করা হয়। ধরি (x_i, y_i) $[i = 1, 2, ..., n]$ একটি নির্দিষ্ট সমতলে উপস্থিত স্বাধীন ও অধীনস্থ এক জোড়া চলকের বাহ্যিক বরাবর এবং y চলরাশির মান সমূহকে y-অক্ষ বরাবর সমতলস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু ‘মূলবিন্দু’ হিসাবে ধরে নিয়ে যথাযথভাবে প্রতিস্থাপিত করলে একটি সুন্দর লেখচিত্রের আবির্ভাব ঘটে। উভয় চল রাশি স্থাপনে অবশ্যই সামঞ্জস্যপূর্ণ স্কেল (বা মাপক) বর্তমান থাকে। (x_i, y_i) $[i = 1, 2, ..., n]$ দ্বিচলকের বিভাজনে স্থানাঙ্ক সমতলে আবির্ভূত লেখচিত্র সহজেই আমাদের তাদের মধ্যে উপস্থিত সম্পর্কটিকে ধরিয়ে দেয়। ফলে সম্পর্কটির প্রকৃতিগত বৈশিষ্ট্যটি পরিস্কারভাবে বুঝা যায়। এটাই বিন্দু চিত্রের (বা বিক্ষিপ্ত চিত্রের) গুরুত্ব। সমতলস্থ দুটি চলের অবস্থান ভেদে এচিত্রের বৈচিত্র্যকে আমরা কয়েকটি ভাগে বিভক্ত ক’রতে পারি। সেটাই এখন আলোচ্য বিষয়।

বিন্দু চিত্রের প্রকার ভেদ ঃ

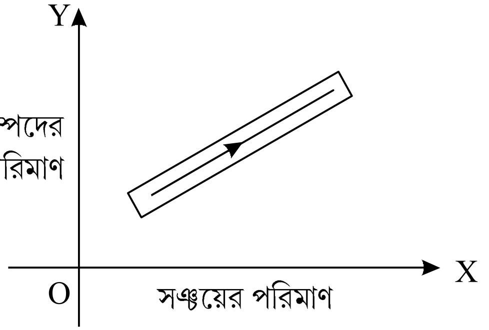
বিন্দু চিত্রের মাধ্যমে আমরা সহপরিবর্তনের মাত্রা ও বৈশিষ্ট্যকে আমরা কয়েকটি শ্রেণিতে এখন ভাগ ক’রব।

(ক) রৈখিক সহপরিবর্তন ঃ

যদি সমতলে প্রতিস্থাপিত (x, y) বিন্দু সমূহ কোন সরল রেখাকে আশ্রয় করে গড়ে উঠে তখন ঐ সহপরিবর্তনের ধারাটিকে ‘রৈখিক সহপরিবর্তন’ হিসাবে উল্লেখ করা হয়। উদাহরণ স্বরূপ কোন ব্যক্তির উপার্জিত সম্পদ এবং সঞ্চয়ের পরিমান সর্বদা রৈখিক সহপরিবর্তনকে নির্দেশ করে। (i) চিত্রানুসারে, অন্যদিকে, জোগান কমের জন্য দ্রব্যের চাহিদা এবং মূল্যবৃদ্ধি (ii) চিত্রকে অনুসরণ করে।

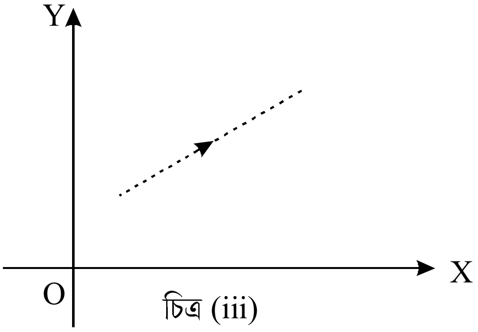


চিত্র (ii)



চিত্র (i)

রৈখিক সহপরিবর্তন তিনটি ধারায় প্রকাশিত।



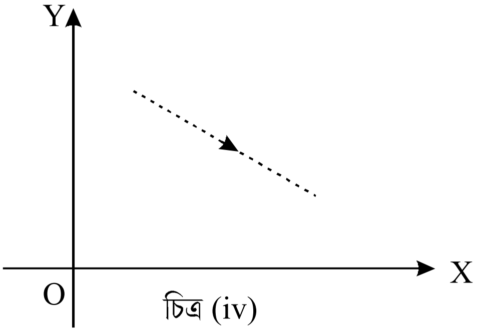
চিত্র (iii)

(i) যথার্থরূপে রৈখিক (Perfectly linear) :

যদি সমতলে প্রতিস্থাপিত বিন্দুসকল প্রকৃত পক্ষে একটি সরলরেখা বরাবর হয় তখন ঐ সহপরিবর্তন কে 'যথার্থরূপে রৈখিক' বলে ধরা হয়।

(ii) ধনাত্মক সহপরিবর্তন (Positine Correlation) :

এক্ষেত্রে সহপরিবর্তনটি যথার্থভাবে রৈখিক ধারায় গঠিত অর্থাৎ সরলরেখাটির গতি নিচের বাঁদিক থেকে উপরের ডানদিকে বিস্তৃত হয়, তাই একে 'ধনাত্মক সহপরিবর্তন' হিসাবে উল্লেখ করা হয়। এস্থলে, $r = 1$. (চিত্র (iii) অনুসারে)

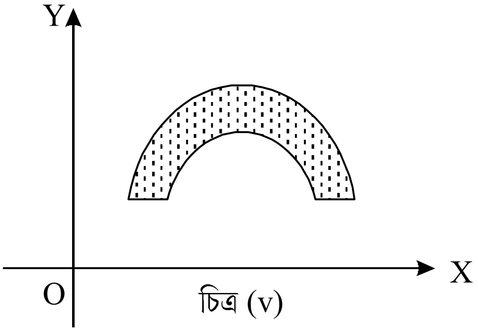


চিত্র (iv)

(iii) বিপরীতমুখী বা ঋণাত্মক সহপরিবর্তন (Inverse or negative correlation) :

এস্থলে, সঠিকভাবে গঠিত রৈখিক সহপরিবর্তনের ধারাটি বাঁদিকের উপর প্রান্ত থেকে ডানদিকের নিচের দিকে গতিশীল হয় তাই একে বিপরীতমুখী বা 'ঋণাত্মক সহপরিবর্তন' বলে।

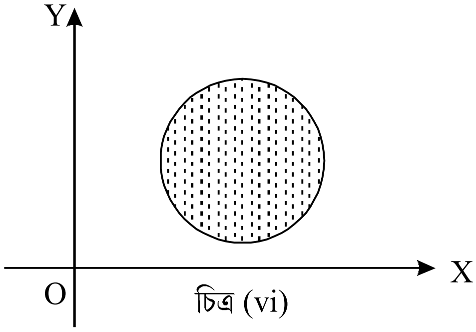
এস্থলে $r = -1$. (চিত্র—(iv) অনুসারে)



চিত্র (v)

(খ) বক্ররৈখিক সহপরিবর্তন (Curvilinear correlation) :

একটি দ্বিচলক বিভাজনে চলের প্রাপ্ত মানগুলি সমতলে প্রতিস্থাপিত হলে প্রথমে উর্দ্ধমুখী পরে ক্ষণস্থায়ী হয়ে নিম্নমুখী হলে এ জাতীয় সহপরিবর্তন দুটি চলের বক্ররৈখিক সহপরিবর্তন রূপে গণ্য করা হয়। চিত্র (v) অনুযায়ী, উদাহরণস্বরূপ, কৃষিজাত দ্রব্যের ফলন ও বৃষ্টিপাতের পরিমাণগত যে সম্পর্ক দৃষ্টিগোচর হয় তাহ'ল এ জাতীয় সহপরিবর্তন।



চিত্র (vi)

সম্পর্কবিহীন সহপরিবর্তন (Non Corelation) :

সমতলে প্রতিস্থাপিত (চলের মান অনুসারে) বিন্দুগুলির কোন সুনির্দিষ্ট নিয়মের অধীনে থেকে কোনোরূপ সম্পর্ককে লেখচিত্রে পরিস্কারভাবে দেখাতে পারে না, এক কথায় বিন্দুগুলি এলোমেলোভাবে বিন্যস্ত থাকে যেখান থেকে বুঝা যায় এরা স্বাধীন ভাবে সঞ্চরণশীল। এ

ধরনের—সহপরিবর্তন দ্বিচলকের বিন্যাস থেকে প্রাপ্ত, তাকে বলা হয় 'এলোমেলো' বা 'সম্পর্কবিহীন সহপরিবর্তন'। (চিত্র (vi) অনুসারে) (এস্থলে $r = 0$)

6.9 সহপরিবর্তন গুণাংক (বা সহগ) নির্ধারণের বিভিন্ন পদ্ধতি

(a) "কার্ল পিয়ারসন" পদ্ধতি ঃ

ব্রিটিশ বিজ্ঞানী কার্ল পিয়ারসন (1867–1936) দুটি চলরাশির মধ্যে গড়ে উঠা সহপরিবর্তনের ধারা কে মাপার জন্য "সহপরিবর্তন গুণাংক" নির্ধারণের একটি বহুল প্রচলিত পদ্ধতির নির্দেশ করেন।

পদ্ধতিটি নিম্নরূপ :

ধরি, x ও y দুটি চলকের *'n'* জোড়া মান হ'ল $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$. চলক দুটির মধ্যে উপস্থিত সহপরিবর্তন গুণাংক বা সহগ (r) -কে নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা হয়।

$$r = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} ....(1)$$

যেখানে, $\operatorname{cov}(x, y) = \frac{1}{n}\sum(x - \bar{x})(y - \bar{y}),$

(সহ-ভেদমান যা x ও y চলকের মধ্যে উপস্থিত)

[$\bar{x} = x$ -চলকের ক্ষেত্রে নির্ধারিত যৌগিক গড়

$\bar{y} = y$ -চলকের ক্ষেত্রে নির্ধারিত যৌগিক গড়]

এবং $\sigma_x = x$ -চলের প্রমাণ বিচ্যুতি,

$\sigma_y = y$ -চলের প্রমাণ বিচ্যুতি।

(1) নং সূত্রটিকে, কার্ল পিয়ারসন -এর 'গুণফল ভ্রামক সূত্র' (Product moment formula) হিসাবে গণ্য করা হয়।

(1) নং সূত্রের সহজ রূপান্তর হ'ল

$$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2 \sqrt{\sum y^2}}}, ...(2)$$

[যেহেতু $\operatorname{cov}(x,y)=\frac{1}{n}\sum xy,\ \sigma_x=\sqrt{\frac{1}{n}\sum x^2},\ \sigma_y=\sqrt{\frac{1}{n}\sum y^2}$

অনেক ক্ষেত্রে, কল্পিত গড়ের সাহায্য নিয়েও r কে নিম্নোক্ত উপায়ে নির্ণয় করা হয়।—

$$r=\frac{n\sum d_xd_y-\left(\sum d_x\right)\left(\sum d_y\right)}{\sqrt{\left[n\sum d_x^2-\left(\sum d_x\right)^2\right]\left[n\sum d_y^2-\left(\sum d_y\right)^2\right]}}.....(3)$$

যেখানে, $d_x=x-\mathrm{A}$ এবং $d_y=y-\mathrm{B}$

[চলক x -এর ক্ষেত্রে কল্পিত গড় = A, এবং চলক y -এর ক্ষেত্রে কল্পিত গড় = B]

(b) সহ-পরিবর্তন সহগাঙ্ক বা সহ-পরিবর্তন গুণাংকের ধর্মাবলি ঃ

(Properties of Correlation Co-efficient)

(i) কার্ল পিয়ারসনের সূত্র অবলম্বনে প্রাপ্ত r (সহপরিবর্তন গুণাংক) -এর মান –1 থেকে 1 -এর মধ্যে বিরাজ করে।

প্রতীকে প্রকাশ করলে : $-1\le r\le 1.$

(ii) সহপরিবর্তন গুণাংক (r) -এর মান মূলবিন্দু (Origin) -এর উপর নির্ভরশীল নয় এবং ‘স্কেল’ (Scale) নিরপেক্ষ।

(iii) সহপরিবর্তন গুণাংক (r) একটি শুদ্ধ সংখ্যা (Pure number) এবং ‘একক’ নিরপেক্ষ।

উদা. (1) প্র. দুটি চলরাশি x ও y -এর সহপরিবর্তন গুণাংক এবং সহভেদমান যথাক্রমে 0·28 এবং 7·6, যদি x -এর ভেদমান 9 হয় তবে y -এর প্রমাণ বিচ্যুতি নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ আমরা জানি যে x ও y চলরাশি দুটির ক্ষেত্রে সহ-পরিবর্তন গুণাংক মান r হলে

$$r=\frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x\sigma_y}....(\mathrm{i})$$ [σ_x, σ_y হ’ল x ও y চল দুটির প্রমাণ বিচ্যুতি]

এস্থলে, শর্তানুসারে

$$r=0{\cdot}28,\ \operatorname{cov}(x,y)=7{\cdot}6,\ \sigma_x^2=9$$

অর্থাৎ $\sigma_x=\sqrt{9}=3\ \left(\because \sigma_x>0\right)$

(i) নং সূত্র থেকে পাই, $0{\cdot}28=\dfrac{7{\cdot}6}{3\times\sigma_y}$

বা, $\sigma_y=\dfrac{7{\cdot}6}{0{\cdot}28\times3}=\dfrac{760}{28\times3}=\dfrac{190}{21}=9{\cdot}04$ (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত)

$\therefore$ y-চলের নির্ণেয় প্রমাণ বিচ্যুতি = $9{\cdot}04$ **(উত্তর)**

উদা. (2) x ও y চলরাশি দুটির সহপরিবর্তন গুণাংক মান নির্ণয়ের জন্য পর্যবেক্ষণ ভিত্তিতে পাওয়া 12 জোড়া মান থেকে নিম্নোক্ত ফল পাওয়া গেল :

$\sum x=30, \sum y=5, \sum x^2=670, \sum y^2=285, \sum xy=334$; পরে গণনাকার্যে দেখা গেল $x = 10$ এবং $y = 14$ জোড়া মানের পরিবর্তে $x = 11$, $y = 4$ জোড়া মান ভ্রমবশত নেওয়া হয়েছে। সঠিক সহপরিবর্তন গুণাংক নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ এক্ষেত্রে,

সঠিক $\sum x=30-11+10=40-11=29$

সঠিক $\sum y=5-4+14=19-4=15$

সঠিক $\sum x^2=670-11^2+10^2=670-121+100$

$=770-121=649$

সঠিক $\sum y=5+14-4=15$

$\sum y^2=285-4^2+(14)^2$

$=285-16+196$

সঠিক $\sum xy=334-(11\times4)+(10\times14)$

$=334-44+140$

$=474-44=430$

যদি সঠিক সহপরিবর্তন গুণাংক (x ও y চল দুটির ক্ষেত্রে) 'r' হয় তবে

$$r=\frac{n\sum xy-\left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{\sqrt{n\sum x^2-\left(\sum x\right)^2}\times\sqrt{n\sum y^2-\left(\sum y\right)^2}}$$

$$= \frac{12\times 430 - 29\times 5}{\sqrt{12\times 699-(29)^2}\times\sqrt{12\times 465-(15)^2}}$$ [এস্থলে n = 12]

$$= \frac{5160-435}{\sqrt{7788-841}\times\sqrt{5580-225}}$$

$$= \frac{4725}{\sqrt{6947}\times\sqrt{5355}}$$

$$= \frac{4725}{83{\cdot}35\times 73{\cdot}17} = \frac{4725}{6098{\cdot}7}$$

$$= \frac{47250}{60987} = 0{\cdot}77$$ (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত)

উ: নির্ণেয় সঠিক সহপরিবর্তন গুণাংকের মান = 0·77.

উদা. 3. নীচে বাবা ও ছেলের উচ্চতা (ইঞ্চিতে) দেওয়া হ'ল।—

বাবার উচ্চতা (ইঞ্চিতে)	64	65	66	67	68	69	70
ছেলের উচ্চতা (ইঞ্চিতে)	66	67	65	68	70	68	72

কার্ল পিয়ারসনের সূত্রকে অনুসরণ করে সহপরিবর্তন গুণাংক (r) নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ সহপরিবর্তন সহগাঙ্ক বা সহপরিবর্তন গুণাংক নির্ধারণের জন্য গণনা প্রণালী

বাবার উচ্চতা (ইঞ্চিতে)	ছেলের উচ্চতা (ইঞ্চিতে)	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-\bar{x})\times(y-\bar{y})$
64	66	64 – 67 = –3	66 – 68 = –2	$(-3)^2 = 9$	$(-2)^2 = 4$	(–3)×(2) = 6
65	67	65 – 67 = –2	67 – 68 = –1	$(-2)^2 = 4$	$(-1)^2 = 1$	(–2)×(–1) = 2
66	65	66 – 67 = –1	65 – 68 = –3	$(-1)^2 = 1$	$(-3)^2 = 9$	(–1)×(3) = 3
67	68	67 – 67 = 0	68 – 68 = 0	$(0)^2 = 0$	$(0)^2 = 0$	0×0 = 0
68	70	68 – 67 = 1	70 – 68 = 2	$(1)^2 = 1$	$(2)^2 = 4$	(1)×(2) = 2
69	68	69 – 67 = 2	68 – 68 = 0	$(2)^2 = 4$	$(0)^2 = 0$	(2)×0 = 0
70	72	70 – 67 = 3	72 – 68 = 4	$(3)^2 = 9$	$(4)^2 = 16$	(3)×(4) = 12
$\bar{x} = \left(\frac{469}{7}\right)$ = 67	$\bar{y} = \frac{476}{7}$ = 68	$\sum(x-\bar{x}) = 0$	$\sum(y-\bar{y}) = 0$	$\sum(x-\bar{x})^2$ = 28	$\sum(y-\bar{y})^2$ = 34	$\sum(x-\bar{x})\times(y-\bar{y}) = 25$

[এক্ষেত্রে, $\sum x = 469, \sum y = 476$]

চলক x ও y -এর মধ্যে

সহ পরিবর্তন গুণাংক (বা সহগাঙ্ক) $= \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x-\bar{x})^2 \times \sum(y-\bar{y})^2}} = \frac{25}{\sqrt{28 \times 34}}$

$= \frac{25}{30{\cdot}8} = \frac{250}{308} = 0{\cdot}81$ (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত)

$\therefore$ নির্ণেয় r -এর মান = $0{\cdot}81$ **(উত্তর)**

6.8 "**স্পিয়ারম্যান**" 'rank' (অনুক্রমমান) সম্পর্কিত সহ পরিবর্তন গুণাংক 'R' (Rank Correlation-Co-efficient) নির্ণয়ের সূত্র ঃ

$$R = 1 - \frac{6\sum D^2}{n^3 - n},$$

যখন D = দুটি rank (অনুক্রম মান) -এর মধ্যে পার্থক্য

n = দলে উপস্থিত উভয় চলকের সংখ্যা।

উদা. 1 (a) কোন পরীক্ষায় 10 টি ছাত্রের পদার্থবিদ্যা ও রসায়নে প্রাপ্ত শতকরা নম্বরের তালিকা নিচেয় দেওয়া হ'ল। এস্থলে সহপরিবর্তন গুণাংক (R) -কে নিম্নোক্ত উপায়ে নির্ণয় করা হয়।

সমাধান ঃ

x	**y**	**Rank (অনুক্রম মান) x -এর ক্ষেত্রে ($=x_1$)**	**Rank (অনুক্রম মান) y -এর ক্ষেত্রে ($=y_1$)**	**D $= x_1 - y_1$**	**D^2**
8	84	10	3	7	49
36	51	7	8	–1	1
98	91	1	1	0	0
25	60	9	6	3	9
75	68	4	4	0	0
82	62	3	5	–2	4
92	86	2	2	0	0
62	58	6	7	–1	1
65	35	5	10	–5	25
35	49	8	9	–1	1
				$\sum D = 10 - 10 = 0$	$\sum D^2 = 90$

∴ নির্ণেয় মানক্রমিক সহপরিবর্তন গুণাংক (সহগাঙ্ক) (R)

$$=1-\left\{\frac{6\sum D^2}{n\left(n^2-1\right)}\right\}$$

$$=1-\frac{6(90)}{10\left(10^2-1\right)}$$

$$=1-\frac{6\times\cancel{90}^{1}}{\cancel{10}_{1}\times\cancel{99}_{11}}$$

$$=1-\frac{6}{11}$$

$$=1-0{\cdot}54$$

$=0{\cdot}46$ (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত) **উত্তর :** 0·46

বি.দ্র. [x ও y -এর প্রদত্ত মানগুলিকে বড় থেকে ছোটো মানে সাজিয়ে এদের যথাযথ rank বা ক্রম নির্ণয় করতে হবে।]

চলরাশি দুটি (যথাক্রমে x ও y) -এর ক্ষেত্রে কোনো বিশেষ মান একাধিক বার তালিকায় অবতীর্ণ হলে সেক্ষেত্রে **সহ-পরিবর্তন গুণাংক** (R) নির্ণয়ের সূত্র পূর্বের সূত্র থেকে পৃথক হয়।

এস্থলে, সূত্রটি হবে নিম্নরূপ :

$$R=1-\frac{6\left\{\sum D^2+\sum\left(\frac{t^3-t}{12}\right)\right\}}{n\left(n^2-1\right)},$$

যখন t হ'ল x ও y -এর ক্ষেত্রে কোনো একটি বিশেষ মান কতবার তালিকায় উপস্থিত হয়েছে তার সংখ্যা। x ও y এর মানগুলিকে (যা তালিকায় উল্লেখ করা আছে) বড় থেকে ছোটো সাজিয়ে নিয়ে যে বিশেষ মান একাধিকবার আছে তাদের যৌগিক গড় থেকে প্রত্যেকটির rank বা ক্রমকে সূচিত করা হয়; পরের চলরাশিটি ঠিক তার পরবর্তী ধনাত্মক সংখ্যায় তার rank বা ক্রম পায়। নীচে প্রদত্ত উদাহরণ থেকে আমরা ব্যাপারটি সহজেই অনুমান করতে পারব এবং R -এর মান উপরিউক্ত সূত্র থেকে নির্ধারণ করতে সক্ষম হব।

উদা. 1 (b)

x	115	109	112	87	98	98	120	100	98	118
y	75	73	85	70	76	65	82	73	68	80

প্রদত্ত তালিকা থেকে সহপরিবর্তন গুণাংক (R) নির্ণয় ক'রতে হবে।

সমাধান ঃ তালিকা থেকে প্রথম x ও y -এর প্রদত্ত মানটি অধঃক্রমে সাজিয়ে নিলাম।

x-এর ক্ষেত্রে,

120, 118, 115, 112, 109, 106, 98, 98, 98, 87। এক্ষেত্রে তালিকায় 98 মানটি তিনবার এসেছে, প্রথম 98 -এর মানটি 'rank' হিসাবে পেয়েছে 7; স্বাভাবিকভাবে পরের দুটি 8 ও 9 কে 'rank' হিসাবে পেয়েছে। 87 -এর 'rank' হয়েছে 10। কিন্তু, 98 একাধিকবার থাকায় তার ক্ষেত্রে common rank (সাধারণ অনুক্রম মান) হবে $\frac{7+8+9}{3}=\frac{24}{3}=8$

***y* -এর ক্ষেত্রে,**

85, 82, 80, 76, 75, 73, 73, 70, 68, 65, অনুরূপভাবে 73 তালিকায় প্রথম rank পেয়েছিল 6 এবং পরেরটি 7; স্বাভাবিকভাবে 68 ও 65, rank হিসাবে পেয়েছে 9 এবং 10.

কিন্তু, 73 তালিকায় দুবার উপস্থিত থাকায় তার সাধারণ (Common) 'rank' (অনুক্রম মান) হবে $=\frac{6+7}{2}$ (গড় মান) $=\frac{13}{2}=6{\cdot}5$

এক্ষেত্রে আরও উল্লেখযোগ্য ঘটনা হ'ল t এর যথার্থ মান বসিয়ে $\sum\frac{t^3-t}{12}$ -কে নির্ধারণ করা। যেমন

$$\sum\frac{t^3-t}{12}=\frac{3^3-3}{12}+\frac{2^3-2}{12}$$

$$=\frac{27-3}{12}+\frac{8-2}{12}=\frac{24}{12}+\frac{6}{12}=2+\frac{1}{2}$$

$$=2+0{\cdot}5=2{\cdot}5$$

'R' নির্ণয়ের ক্ষেত্রে গণনা তালিকাটি হল :

x	y	Rank (r_1) (x এর ক্ষেত্রে)	Rank (r_2) y এর ক্ষেত্রে	D $= r_1 - r_2$	D^2
115	75	3	5	–2	4
109	73	5	6·5	–1·5	2·25
112	85	4	1	3	9
87	70	10	8	2	4
98	76	8	4	4	16

98	65	8	2	–1	1
120	82	1	2	–1	4
100	73	6	6·5	–0·5	0·25
98	68	8	9	–1	1
118	80	2	3	–1	1
—	—	—	—	$\sum D = 0$	$\sum D^2 = 42{\cdot}5$

∴ R (সহ-পরিবর্তন গুণাংক বা সহগাঙ্ক)

$$= 1 - \frac{6\sum D^2 + \left(\frac{\sum t^3 - t}{12}\right)}{n^3 - n}$$ এখানে $n = 10$.

$$= 1 - \frac{6\{42{\cdot}5 + (2{\cdot}5)\}}{10^3 - 10}$$ [x ও y উভয় চলের উপস্থিত সংখ্যা = 10]

$$= 1 - \frac{6 \times 45}{990}$$

$$= 1 - \frac{270}{990} = 1 - \frac{3}{11}$$

= 1 – 0·27 (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত)

= 0·73 **উত্তর** : 0·73

লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতিতে নির্ভরণ (regression line) : সরলরেখার মাধ্যমে একটি চলের বিশেষ মানের সাহায্যে অপর চলের মান সহজেই নির্ণয় করা যায়। যদি y -কে অধীনস্থ চল এবং x -কে স্বাধীন চল হিসাবে গণ্য করা হয় তবে নির্ভরণ সরলরেখার সমীকরণটি হয় নিম্নরূপ : $y = a + bx$ [যেখানে a ও b বাস্তব ধ্রুবরাশি] ;

অপরদিকে, y -কে স্বাধীন এবং x -কে অধীনস্থ চল হিসাবে বিবেচনা করলে ঐ সমীকরণটি হয় $x = c + dy$ [যেখানে c ও d বাস্তব ধ্রুবরাশি বা (real constants)

এক্ষেত্রে উল্লেখযোগ্য যে, নির্ভরণ রেখার সমীকরণ (equation of the line of regression) [যখন y, x এর উপর নির্ভরশীল অর্থাৎ **'y on x'**] হ'ল

$y-\overline{y}=b_{yx}\left(x-\overline{x}\right)$ [যখন b_{yx} হ'ল নির্ভরণ সহগাঙ্ক (regression co-efficient of y on x)].....(1)

এস্থলে, $b_{yx}=\dfrac{\sum x'y'}{\sum x'^2}$ হবে [যখন $x-\overline{x}=x'$ এবং $y-\overline{y}=y'$]

অবশ্যই $\overline{x}$ ও $\overline{y}$ যথাক্রমে x ও y চলের যৌগিক গড়কে বুঝায়।

$b_{yx}=r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$ [যখন সপরিবর্তন সহগ হয় r এবং σ_x ও σ_y যথাক্রমে x ও y চলের সমক প্রভেদকে (S·D) নির্দেশ করে]

অনুরূপে, x -কে y -এর উপর নির্ভরশীল রেখে যে নির্ভরণ রেখার সমীকরণ পাওয়া যায় তা হ'ল

$x-\overline{x}=b_{xy}\left(y-\overline{y}\right).....(2)$ [b_{xy}, -নির্ভরণ রেখার সহগ যখন x, y -এর উপর নির্ভরশীল]

অর্থাৎ $x-\overline{x}=r\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(y-\overline{y}\right)$, যখন $b_{xy}=r\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}$.

প্রসঙ্গত : $b_{xy}=\dfrac{n\sum xy-\left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{n\sum y^2-\left(\sum y\right)^2}$

বা, $b_{xy}=\dfrac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_y^2}$

$=r\cdot\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}.$

একই ভাবে উল্লেখ করা যায় যে

$$b_{yx}=\frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_y^2}=r\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}.$$

নির্ভরণ সরলরেখার প্রবণতা (slope) হিসাবে (1) -নং এর ক্ষেত্রে b_{yx} এবং (2) নং এর ক্ষেত্রে $\dfrac{1}{b_{xy}}$ প্রযোজ্য।

এস্থলে লক্ষণীয় যে

$$\left(b_{yx}\right)\times\left(b_{xy}\right)$$

$$=\left(r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\right)\times\left(r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\right)$$

$$= r^2$$

সহপরিবর্তন সহগ (r) নির্ণয় কালে r; b_{yx} এবং b_{xy} -কে সমচিহ্নযুক্ত করে প্রকাশ করতে হবে। উদাহরণ হিসাবে বলা যায় যে $b_{xy} = -0{\cdot}3$ এবং

$b_{yx} = -1{\cdot}2$ হলে $r^2 = \left(b_{yx}\right)\times\left(b_{xy}\right)$

$$=\left(-1{\cdot}2\right)\times\left(-0{\cdot}3\right)$$

$$=\frac{36}{100} \Rightarrow r = \pm\frac{6}{10} = \pm 0{\cdot}6$$

এক্ষেত্রে r -এর মান $= -0{\cdot}6$ [কারণ, r, b_{yx} ও b_{xy} -কে সমচিহ্ন যুক্ত করে প্রকাশ করা হয়েছে।]

বি.দ্র. একথা স্মরণযোগ্য যে নির্ভরণ সরলরেখা দুটি (y, x -এর উপর অথবা x, y এর উপর নির্ভর কালে) পরস্পরকে তাদের যৌগিক গড় (AM) $\left[\left(\overline{x},\overline{y}\right)\right]$ বিন্দুতে ছেদ করে।

উদা. 1 y, x -এর উপর নির্ভর করলে, নির্ভরণ রেখার সমীকরণ $3x - 4y + 60 = 0$ এবং $\overline{y} = 50$ হলে $\overline{x}$ নির্ণয় ক'রে দেখাও।

সমাধান ঃ আমরা জানি যে, নির্ভরণ রেখা দুটি পরস্পরকে $\left(\overline{x},\overline{y}\right)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$3x - 4y + 60 = 0$ নির্ভরণ রেখা অবশ্যই $\left(\overline{x},\overline{y}\right)$ বিন্দুগামী।

$$\therefore 3\overline{x} - 4\overline{y} + 60 = 0$$

বা, $3\overline{x} = 4\overline{y} - 60$

$$= 4\left(50\right) - 60 \quad \left[\therefore \overline{y} = 50\right]$$

$$= 200 - 60$$

$$= 140$$

বা, $\overline{x} = \frac{140}{3}$

$= 46{\cdot}66$ (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত)

$= 46{\cdot}7$ (আসন্ন)

উ. $\overline{x} = 46{\cdot}7$

উদা. 2 যদি $\overline{x} = 6,\ \overline{y} = 7,\ b_{yx} = 0{\cdot}45$ এবং $b_{xy} = 0{\cdot}65$ হয় তবে *y, x* এর উপর নির্ভর করলে এবং বিপরীতভাবে *x, y* -এর উপর নির্ভর কলে নির্ভরণ সরলরেখা দুটির সমীকরণ নির্ণয় ক'রে দেখান।

সমাধান ঃ

যখন *y, x* -এর উপর নির্ভর করে তখন নির্ভরণ সরলরেখার সমীকরণ হয়

$$y - \overline{y} = b_{yx}\left(x - \overline{x}\right)$$

বা, $y - 7 = 0{\cdot}45(x - 6)$ (যেহেতু, $\overline{x} = 6, \overline{y} = 7$ এবং $b_{yx} = 0{\cdot}45$)

বা, $y = 0{\cdot}45x - (0{\cdot}45)(6) + 7$

বা, $y = 0{\cdot}45x - 2{\cdot}70 + 7$

বা, $y = 0{\cdot}45x + 7 - 2{\cdot}7$

বা, $y = 0{\cdot}45x + 4{\cdot}3$

অনুরূপে, *x, y* -এর উপর নির্ভর করলে নির্ভরণ সরলরেখার সমীকরণ হয়:

$$x - \overline{x} = b_{xy}\left(y - \overline{y}\right)$$

বা, $x - 6 = 0{\cdot}65(y - 7)$ [যেহেতু, $\overline{x} = 6,\ \overline{y} = 7$ এবং $b_{xy} = 0{\cdot}65$]

বা, $x = 0{\cdot}65y - (0{\cdot}65)(7) + 6$

বা, $x = 0{\cdot}65y - 4{\cdot}55 + 6$

বা, $x = 0{\cdot}65y + 6 - 4{\cdot}55$

বা, $x = 0{\cdot}65y + 1{\cdot}45$

উত্তর : নির্ণেয় নির্ভরণ রেখা দুটির সমীকরণ হ'ল: $y = 0{\cdot}45x + 4{\cdot}3$ এবং $x = 0{\cdot}65y + 1{\cdot}45$

উদা. 3 দ্বি-চলের বিভাজন ক্ষেত্রে, x -এর যৌগিক গড় (AM) যদি 20 এবং y -এর যৌগিক গড় (AM) 45 হয়, y, x -এর উপর নির্ভর করলে, নির্ভরণ সহগাঙ্ক 4 এবং x, y -এর উপর নির্ভর করলে, নির্ভরণ সহগাঙ্ক 0·0625 হলে সহপরিবর্তন সহগাঙ্ক (r) নির্ণয় কর এবং σ_x (x -এর সমক পার্থক্য) কত হবে যদি σ_y (y -এর সমক পার্থক্য) 16 হয়?

সমাধান ঃ এক্ষেত্রে প্রশ্নানুযায়ী,

$\overline{x} = 20,\ \overline{y} = 45,\ b_{yx} = 4$ এবং $b_{xy} = 0{\cdot}0625,\ \sigma_y = 16.$

আমরা জানি যে, $r^2 = b_{yx} \times b_{xy}$

বা, $r^2 = 4 \times 0{\cdot}0625$

$= 4 \times \frac{625}{10000}$

$= 4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$

$\therefore r = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$ বা, $r = \pm\frac{1}{2}$

কিন্তু $b_{xy} = 0{\cdot}0625 > 0$ এবং $b_{yx} = 4 > 0$ হওয়ার ফলে r অবশ্যই ধনাত্মক মানযুক্ত হবে। অর্থাৎ $r = \frac{1}{2}$ হবে।

এস্থলে, $b_{yx} = \frac{1}{2} \times \frac{16}{\sigma_x}$ [কারণ, $b_{yx} = r \times \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$]

বা, $4 = \frac{1}{2} \times \frac{16}{\sigma_x}$

বা, $4 = \frac{8}{\sigma_x}$ বা, $\sigma_x = \frac{8}{4} = 2$

সুতরাং, x -এর সমক পার্থক্য (S.D) $(\sigma_x) = 2$

উত্তর : $r = \frac{1}{2}$ এবং $\sigma_x = 2$

উদা. 4. যদি $\sigma_x^2 = 6{\cdot}25,\ \sigma_y^2 = 4$ এবং $\text{cov}(x, y) = 0{\cdot}9$ হয় তবে সহপরিবর্তন সহগ (r) নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ শর্তানুসারে,

$\sigma_x^2 = 6{\cdot}25$

বা, $\sigma_x = \sqrt{6 \cdot 25}$

বা, $\sigma_y = \sqrt{\dfrac{625}{100}}$

বা, $\sigma_x = \dfrac{25}{10} = 2{\cdot}5 \ (\because \sigma_x \nleq 0)$

পুনরায়, $\sigma_y^2 = 4$

বা, $\sigma_y = \sqrt{4}$

বা, $\sigma_y = 2 \ (\therefore \sigma_y \dot{\nless} 0)$

আমরা জানি যে,

$$r = \frac{\text{cov}(x, y)}{(\sigma_x)(\sigma_y)}$$

বা, $r = \dfrac{0{\cdot}9}{2{\cdot}5 \times 2}$

বা, $r = \dfrac{0{\cdot}9}{5} = 0{\cdot}18$

উত্তর : $\therefore$ নির্ণেয় সহপরিবর্তন গুনাংক (বা সহগ-অংক) (Co-efficient of Correlation) = $0 \cdot 18$

উদা. 5 , তালিকার সাহায্যে y, x -এর উপর নির্ভরশীল -এর নির্ভরণ সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন। $x = 6$ হলে y -এর মান কত হবে তা নির্ণয় করুন।

x	1	2	3	4	5
y	7	6	5	4	3

সমাধান ঃ

এক্ষেত্রে

পদসংখ্যা $(n) = 5$.

	x	y	xy	x^2
	1	7	7	1
	2	6	12	4
	3	5	15	9
	4	4	16	16
	5	3	15	25
যোগফল	15	25	65	55

$$\overline{x} = \frac{\sum x}{n}$$

$$= \frac{15}{5}$$

$$= 3$$

এবং $\overline{y} = \frac{\sum y}{n}$

$$= \frac{25}{5}$$

$$= 5$$

$$\therefore b_{yx} = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sum x^2 - \frac{\left(\sum x\right)^2}{n}}$$

$$= \frac{65 - \frac{1}{5} \cdot (15) \cdot (25)}{55 - \frac{1}{5}(15)^2}$$

$$=\frac{65-3\times25}{55-3\times15}$$

$$=\frac{65-75}{55-45}=-\frac{10}{10}=-1$$

y, x -এর উপর নির্ভরশীল এরূপ নির্ভরণ সরল রেখার সমীকরণ হ'ল

$$y-\overline{y}=b_{yx}\left(x-\overline{x}\right)$$

বা, $y-5=(-1)(x-3)$

বা, $y-5=-x+3$

বা, $y=-x+5+3$

বা, $y=-x+8.....(\text{i})$

(i) নং থেকে y -এর মান নির্ণয় ক'রব যখন $x = 6$

সুতরাং $y = -6 + 8$

বা, $y = 2$

উত্তর : *y, x* -এর উপর নির্ভরশীল এমন অবস্থায় নির্ভরণ সরলরেখার সমীকরণ হ'ল

$y = -x + 8$ এবং $x = 6$ হলে y -এর নির্ধারিত মান হয় 2

উদা. 6 (i) দুটি চলরাশির মধ্যে সহপরিবর্তন গুণাংক বা সহগাঙ্ক (Correlation Co-efficient) -এর মান সঠিকভাবে নির্বাচন করুন :

(a) 1·6

(b) –1·4

(c) 0·7

(d) কোনো মানই গ্রহণযোগ্য নয়।

সমাধান ঃ যেহেতু সহগতি গুণাংক বা সহগাঙ্ক (r) সর্বদা নিম্নোক্ত সম্পর্ক

$-1\leq r\leq1$ বজায় রাখে, সুতরাং (c) উত্তরটি যথার্থ বলে বিবেচিত হয়।

(ii) নির্ভরণ সরলরেখা দুটি একটি সরলরেখায় রূপান্তরিত হলে চলরাশি দুটির মধ্যে সহগাঙ্ক (r) হবে

(a) 0

(b) ±1

(c) 2 অপেক্ষা কম

(d) কোনো মান বলা সম্ভব নয়।

সমাধান ঃ ধরি, নির্ভরণ সরলরেখা দুটি x অক্ষের সহিত θ এবং ϕ কোণে নত এবং নিজেদের কোনো ψ কোণে নত। ধরি, $\psi = \phi - \theta$ $\therefore \tan\psi = \frac{1-r^2}{r} \cdot \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \cdot$ যখন $\psi = 0$ (অর্থাৎ নির্ভরণ সরলরেখা দুটি একই সরলরেখায় পরিণত তখন $r = \pm 1$. **সঠিক উত্তর :** $r = \pm 1$ হবে।

উদা. 7. n-পর্যবেক্ষণযুক্ত একটি নমুনা সংগ্রহ কালে $\sum d^2 = 20$ এবং স্পিয়ারম্যানের ক্রমিক মান সহগাঙ্ক (Rank Correlation Coefficient) $(\mathrm{R}) = \frac{3}{7}$ হলে, n -এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ স্পিয়ারম্যানের সূত্রানুসারে,

$$\mathrm{R} = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)}$$

প্রশ্নমতে, $\frac{3}{7} = 1 - \frac{6 \times 20}{n(n^2-1)}$

$$\Rightarrow \frac{6 \times 20}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{6 \times 20}{n(n-1)(n+1)} = \frac{4}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{6 \times 4 \times 5}{n(n-1)(n+1)} = \frac{4}{7}$$

$$\Rightarrow (n-1)n(n+1) = 5 \times 6 \times 7$$

$$\Rightarrow (n-1)n(n+1) = (6-1) \times 6 \times (6+1)$$

উভয় পক্ষের সমতা বিচার করে পাই, $n = 6$.

উত্তর : নির্ণেয় $n = 6$.

উদা. 8. গণক দুটি চলরাশি x ও y -এর মধ্যে সহপরিবর্তন সহগাঙ্ক (r) নির্ণয় কালে 25 জোড়া পর্যবেক্ষণের জন্য নিম্নোক্ত ফলগুলি লিপিবদ্ধ ক'রলেন :

$\sum x = 125,\ \sum x^2 = 650,\ \sum y = 100,\ \sum y^2 = 460$ এবং $\sum xy = 508$; কিন্তু গণনা কালে ভুলবশত (8, 12) এবং (6, 8) -এর জায়গায় (6, 14) এবং (8, 6) লেখা হয়েছে।

ত্রুটিবর্জিত সঠিক (r) -এর আসন্ন (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত) মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ সঠিক $\sum x = 125 - 6 - 8 + 8 + 6 = 125$

সঠিক $\sum y = 100 - 14 - 6 + 12 + 8 = 100$

সঠিক $\sum x^2 = 650 - 6^2 - 8^2 + 6^2$

$$= 650 - 36 - 64 + 64 + 36 = 650$$

সঠিক $\sum y^2 = 460 - 14^2 - 6^2 + 12^2 + 8^2$

$$= 460 - 196 - 36 + 144 + 64 = 436$$

সঠিক $\sum xy = 508 - (6)(14) - (8)(6) + (8)(n) + (6)(8)$

$$= 508 - 84 - 48 + 96 + 48 = 520$$

$\therefore\ r$ (সহপরিবর্তন সহগাঙ্ক)

$$= \frac{\sum xy - \frac{1}{n}\sum x \sum y}{\sqrt{\sum x^2 - \frac{\left(\sum x\right)^2}{n}\sqrt{\sum y^2 - \frac{\left(\sum y\right)^2}{n}}}}$$

$$= \frac{520 - \frac{1}{25}(125)(100)}{\sqrt{650 - \frac{1}{25}(125)^2\sqrt{436 - \frac{(100)^2}{25}}}}$$

$$= \frac{520-500}{\sqrt{650-625}\sqrt{436-400}}$$

$$= \frac{20}{\sqrt{25}\sqrt{36}} = \frac{20}{5\times6} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} = 0{\cdot}666$$ (তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত)

$= 0{\cdot}67$

উত্তর : $0{\cdot}67$

উদা. 9. নীচের তালিকা সাপেক্ষে নির্ভরণ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন :

ক্যাব-গাড়ির বয়স (বছরে)	2	4	6	8
সংস্কার ও পরিস্কারবাবদ খরচ (শত টাকার হিসাবে)	10	20	25	30

সমাধান ঃ ধরি, x হ'ল ক্যাবের বয়স (বছরে) এবং y নির্দেশ করে সংস্কার ও পরিস্কারবাবদ খরচ (শত টাকার হিসাবে)

নির্ভরণ রেখার নির্ধারণ (তালিকা) :

	x	x^2	y	xy
	2	4	10	20
	4	16	20	80
	6	36	25	150
	8	64	30	240
মোট	20	120	85	490

$\bar{x}$ (যৌগিক গড়) $= \frac{20}{4} = 5$

$\bar{y}$ (যৌগিক গড়) $= \frac{85}{4} = 21{\cdot}25$

b_{yx} (নির্ভরণ সহগাঙ্ক যখন y, x -এর উপর নির্ভরশীল)

$$= \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} = \frac{4\times490-20\times85}{4\times120-(20)^2}$$

$$=\frac{260}{80}=\frac{26}{8}=\frac{13}{4}=3{\cdot}25$$

$\therefore$ নির্ণেয় নির্ভরণ সরলরেখার সমীকরণ (যখন y, x -এর উপর নির্ভর করে)

$$y-\bar{y}=b_{yx}\left(x-\bar{x}\right)$$

বা, $y-21{\cdot}25=3{\cdot}25\left(x-5\right)$

বা, $y=3{\cdot}25x-16{\cdot}25+21{\cdot}25$

বা, $y=3{\cdot}25x+5$

উত্তর : $y=3{\cdot}25x+5$

উদা. 10.

পিতার উচ্চতা (ইঞ্চিতে	64	65	66	67	68	69	70
পুত্রের উচ্চতা (ইঞ্চিতে)	66	67	65	68	70	68	72

উপরো তালিকা থেকে সহপরিবর্তন সহগাঙ্ক (r) নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ r -এর মান নির্ধারণের জন্য নির্দিষ্ট তালিকাটি হ'ল :

পিতার উচ্চতা (X)	**পুত্রের উচ্চতা (Y)**	$x = X-\bar{X}$	$y = Y-\bar{Y}$	x^2	y^2	xy
64	66	–3	–2	9	4	6
65	67	–2	–1	4	1	2
66	65	–1	–3	1	9	3
67	68	0	0	0	0	0
68	70	1	2	1	4	2
69	68	2	0	4	0	0
70	72	3	4	9	16	12
$\bar{X}=\frac{469}{7}=67$	$\bar{Y}=\frac{476}{7}=68$	$\sum x=0$	$\sum y=0$	$\sum x^2$ $=28$	$\sum y^2$ $=34$	$\sum xy$ $=25$

X ও Y এর সহপরিবর্তন সহগাঙ্ক $\left(r\right)=\dfrac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2\times\sum y^2}}=\dfrac{25}{\sqrt{28\times34}}=0{\cdot}81$

উত্তর : r = 0·81

6.10 সংক্ষিপ্তসার

এই একক থেকে আমরা জানতে পারি—

- 'পরিসংখ্যানবিদ্যা' বা 'রাশিবিজ্ঞান' হল রাশিতথ্য সংগ্রহ করে তাকে সুষ্টভাবে পরিবেশন ও বিশ্লেষণের মাধ্যমে বিজ্ঞানসম্মত উপায় প্রকাশ করা।
- কোনো চলের কেন্দ্রীয় প্রবণতা ও তার পরিমাপ
- কোনো চলের পরিঘাত, প্রতিবৈষম্য এবং তীক্ষ্মতা
- দ্বিচলকের ক্ষেত্রে সহপরিবর্তন এবং প্রতিগমন বা নির্ভরণ।

6.11 অনুশীলনী

শূন্যস্থান সঠিক শব্দে পূরণ করুন :

1. (a) কোনো বিভাজনের প্রতিবৈষম্য বিভাজনটির ——— কে নির্দেশ করে।

(b) ঋণাত্মক প্রতিবিষম বিভাজনের ক্ষেত্রে $g_1 = 0$, $g_1 < 0$, $g_1 > 0$. কোন্‌টি সঠিক?

(c) প্রতিসম বিভাজনের বেলায়

(i) গড় < মধ্যমা < সংখ্যাগুরু মান

(ii) গড় > মধ্যমা > সংখ্যাগুরু মান

(iii) গড় = মধ্যমা = সংখ্যাগুরু মান, হবে। কোন বিবৃতিটি সঠিক?

(d) কোনো বিভাজন 'মধ্যম তীক্ষ্ণ' হবে যদি

(i) $g_2 = 0$

(ii) $g_2 > 0$

(iii) $g_2 < 0$,

সঠিক বিবৃতিটি উল্লেখ করুন।

2. (a) যদি $Q_1 = 26$, $Q_3 = 76$ এবং প্রতিবৈষম্য গুণাংক = 0·2 হয় তবে মধ্যমার মান কত?

(b) যদি দ্বিতীয় ও তৃতীয় কেন্দ্রীয় ভ্রামক (Central moments) 4 এবং 12 হয় তবে বিভাজনের প্রতিবৈষম্য গুণাংক নির্ণয় করুন।

3. কোনো একটি বিভাজনে (প্রতিবৈষম্য প্রকৃতিযুক্ত), মধ্যক (A.M) = 172, মধ্যমা (median) = 167 এবং প্রমাণ বিচ্যুতি (σ) = 60. বিভাজনের প্রতিবৈষম্য গুণাংক এবং সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করুন।

4. কোনো পরিসংখ্যা বিভাজনে প্রথম চারটি শূন্যকেন্দ্রিক ভ্রামক (raw moments or moments about origin) হ'ল যথাক্রমে –4, 22, –105 এবং 144 ; তীক্ষ্ণতা গুণাংক (β_2) নির্ণয় কর এবং এর প্রকৃতি উল্লেখ করুন।

5. নিচের তালিকায় 100 জন লোকের একটি গোষ্ঠীর উচ্চতা দেওয়া হ'ল। বিভাজনটির তীক্ষ্ণতা সম্পর্কে মন্তব্য উল্লেখ করুন।

উচ্চতা (ইঞ্চিতে)	59	61	63	65	67	69	71	73	75
লোকসংখ্যা	0	2	8	20	40	20	8	2	0

6.

x	2	4	6	8
f	10	15	10	5

প্রদত্ত তালিকার প্রেক্ষিতে x -এর শূন্যকেন্দ্রিক তৃতীয় ভ্রামক (পরিঘাত) নির্ণয় করুন।

7. একটি বিভাজনের গাণিতিক গড় = 5, দ্বিতীয় ও তৃতীয় কেন্দ্রীয় পরিঘাত (ভ্রামক) যথাক্রমে 20 এবং 3140; বিভাজনটির 10 -কেন্দ্রিক তৃতীয় পরিঘাত (ভ্রামক) -এর মান নির্ণয় করুন।

8. নীচে প্রদত্ত বিভাজনের ক্ষেত্রে প্রফেসর বাওলির পদ্ধতি অবলম্বনে প্রতিবৈষম্য গুণাংকের মান নির্ণয় করুন :

বাৎসরিক বিক্রয়	0–20	20–50	50–100	100–250	250–500	500–1000
হাজার টাকায়	20	50	69	30	25	19

9. কোনো পরিসংখ্যা বিভাজনে প্রথম চারটি শূন্যকেন্দ্রিক ভ্রামকের মান যথাক্রমে –4, 22, –105 এবং 144, তীক্ষ্ণতা গুণাংক (γ_2) নির্ধারণ করুন এবং এর প্রকৃতি কীরূপ তা উল্লেখ করুন।

10. প্রতিবৈষম্য গুণাংক নির্ণয় কর : (কার্ল পিয়ারসন পদ্ধতিতে) (নীচের দেওয়া তালিকা থেকে)

চলের শ্রেণি সীমা	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
পরিসংখ্যা	14	23	27	21	15

11. নিম্নোক্ত তালিকা থেকে প্রতিবৈষম্য গুণাংক নির্ণয় করুন :

(প্রফেসর বাওলির পদ্ধতিতে) :

চলের মধ্যমান	75	100	125	150	175	200	225	250
পরিসংখ্যা	35	40	48	100	125	80	5	22

12. কোনো একটি বিভাজনের প্রেক্ষিতে প্রতিবৈষম্য গুণাংক, Q_1, Q_3 যথাক্রমে –0·8, 44·1 এবং 56·6 হলে, মধ্যমার মান নির্ণয় করুন।

13. কোনো একটি বিভাজনের 5 -কেন্দ্রিক প্রথম চারটি ভ্রামক যথাক্রমে 7, 70, 140 ও 175 ; β_1 এবং β_2 নির্ণয় করুন।

14. গড় মান (বা মধ্যক) = 11, এই মধ্যক সাপেক্ষে প্রথম চারটি ভ্রামক যথাক্রমে 0, 3·2, 36 এবং 20. শূন্যকেন্দ্রিক প্রথম চারটি ভ্রামক নির্ণয় করুন।

15. নিচের তালিকা অনুসারে সহপরিবর্তন সহগাঙ্ক নির্ণয় কর এবং সম্পর্কটি সামঞ্জস্যপূর্ণ কিনা তা উল্লেখ করুন।

স্বামীর বয়স (বছরে)	23	27	28	29	30	31	33	35	36
স্ত্রীর বয়স (বছরে)	18	20	22	27	22	27	29	28	29

16. আট জন পরীক্ষার্থীর পদার্থবিদ্যায় ও গণিতে প্রাপ্ত নম্বরের তালিকা নীচে দেওয়া হ'ল। স্পিয়ারম্যানের পদ্ধতি অনুসারে মানক্রমিক সহগাঙ্ক (P) (Co-efficient of rank correlation) নির্ণয় করুন। (প্রতিটি বিষয়ে সর্বোচ্চ নম্বর 100 ধরি) :—

পদার্থবিদ্যায় প্রাপ্ত নম্বর	15	20	28	12	40	60	20	80
গণিতে প্রাপ্ত নম্বর	40	30	50	30	20	10	30	60

17. যদি $\sum_{i=1}^{5} x_i - 2 = 10, \sum_{i=1}^{5} y_i - 5 = 20,$

$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 148$ হয় তবে cov (x, y) -এর মান কত হবে তা স্থির করুন।

18. কার্ল পিয়ারসন পদ্ধতিতে সহপরিবর্তন সহগাঙ্ক (co-efficient of correlation) নির্ণয় করুন যখন x ও y চলরাশি দুটির মানগুলি নিম্নরূপ :

x	16	18	21	20	22	26	27	15
y	22	25	24	26	25	30	33	18

19. দশটি ছাত্রের অর্থনীতিবিদ্যায় ও পরিসংখ্যানবিদ্যায় প্রাপ্ত নম্বরে তালিকাটি নিম্নরূপ :

প্রাপ্ত নম্বর পরিসংখ্যান বিদ্যায় (x)	3	5	8	4	7	10	2	1	6	9
অর্থনীতি বিদ্যায় প্রাপ্ত নম্বর (y)	6	4	9	8	1	2	3	10	5	7

মানক্রমিক সহগাঙ্ক (p) নির্ণয় করুন।

20. দুটি নির্ভরণ সরলরেখার মধ্যে β কোণ উৎপন্ন হলে প্রমাণ কর যে $\tan^{-1}\beta=\frac{\left(1-r^2\right)\sigma_x\sigma_y}{r\left(\sigma_x^2+\sigma_y^2\right)}=0$ এবং $r=\pm 1$ হলে উপরিউক্ত সূত্রটির তাৎপর্য (significance) উল্লেখ করুন।

21. নির্ভরণ সরলরেখা দুটি (দ্বিচলকের ক্ষেত্রে) যথাক্রমে $3x - y + 2 = 0$ এবং $y = x$ হলে প্রমাণ করুন, $\sigma_x : \sigma_y = 1 : \sqrt{3}$

22. 10 টি ছাত্রের একটি শ্রেণি পরীক্ষায় ইংরাজি এবং গণিতের প্রাপ্ত নম্বরের তালিকা নীচে দেওয়া হল।

গণিতের প্রাপ্ত নম্বর	24	25	28	29	32	35	36	41	45	50
ইংরাজিতে প্রাপ্ত নম্বর	44	42	40	52	39	32	24	46	41	50

দ্বিতীয় বিষয় সাপেক্ষে প্রথম বিষয়ের

(i) কার্ল পিয়ারসন পদ্ধতিতে সহপরিবর্তন সহগাঙ্ক (Correlation Co-efficient)

(ii) স্পিয়ারম্যান পদ্ধতি অবলম্বনে অনুক্রমিক সহগাঙ্ক (rank Correlation Co-efficient) নির্ণয় করুন।

23. দুটি নির্ভরণ সরলরেখার সমীকরণ যথাক্রমে $4x + 3y + 7 = 0$ (y, x -এর উপর নির্ভরশীল) এবং $3x + 4y + 8 = 0$ (x, y -এর উপর নির্ভরশীল) হলে (i) b_{yx} (ii) b_{xy} কত? (iii) দেখান যে $r=-\frac{3}{4}$.

24.

x	1	2	3	4	5
y	7	6	5	4	3

(i) প্রমাণ কর যে $b_{yx} = -1$

(ii) নির্ভরণ সরলরেখার সমীকরণ (যখন y, x -এর নির্ভরশীল) হবে $y + x = 8$

(iii) $x = 6$ হলে y -এর প্রত্যাশিত মান কত হবে? (**উত্তর** : $y = 2$)

6.12 গ্রন্থপঞ্জি

- Ranajit Dhar, (2011), Advanced Business Mathematics, Dishari Prakashani
- Mehta and Madnani, (2012), Mathematics for Economists, Sultan Chand and Sons
- Sarkhel and Bhukta, (2010), An Introduction to Mathematical Techniques for Economic Analysis, Book Syndicate Private Limited
- Agarwal, (2000), Quantitative Methods, Vrinda Publications Pvt Ltd